Technik der Personalversicherung

KGP-Kurse

Juni 1969

I N H A L T

	Seite
I. Einleitung	1
II. Elemente der Finanzmathematik	2
III. Sterbetafeln	13
IV. Die Erlebensfalleistung	20
V. Rentenbarwerte	24
VI. Die Todesfalleistung	31
VII. Individuelle Jahresprämien	37
VIII. Das Deckungskapital	38

TECHNIK DER PERSONALVERSICHERUNG

von Eric Deprez

I. Einleitung

Auf Grund von Beobachtungen an grossen Personengesamtheiten gelingt es, die Anzahl der in der Personalversicherung zu erwartenden "versicherten Ereignisse" zu erfassen und damit einerseits die jährlichen Ausgaben im Falle von Tod, Invalidität und Alterspensionierung und andererseits die jährlichen Beitragseinnahmen zu ermitteln. Durch sukzessive Diskontierung - und hier erscheint ein wichtiges Rechnungselement - der jährlichen Ausgaben und Einnahmen können die Barwerte der in einer mehr oder weniger fernen Zukunft fälligen Vorsorgeleistungen und Beiträge berechnet werden.

Diese Erkenntnis soll nun eingehend konkretisiert werden, im besonderen durch die Herleitung der wichtigsten diesbezüglichen Formeln und Beziehungen. Dabei wird man vorerst das Wesentliche über den Einfluss des Zinses untersuchen müssen. Wir werden nämlich sehen, dass in unseren Berechnungen ein Zinsfuss eingeführt wird, der sog. versicherungstechnische Rechnungszinsfuss. Die Wahl dieses Zinsfusses ist von ausschlaggebender Bedeutung, enthält sie doch eine Annahme über die zu erwartenden Zinserträge des bestehenden Kassenvermögens und der künftig eingehenden Beiträge des Arbeitgebers und der Versicherten.

Mit Zins bezeichnet man bekanntlich die Vergütung, welche für das Ausleihen einer Geldsumme zu leisten ist. Obwohl die Elemente der Zinsrechnung im allgemeinen noch bekannt sein werden, müssen wir uns mit diesem Thema genauer befassen. Das betreffende Wissensgebiet heisst Finanzmathematik. Wir werden also den Wert eines Kapitals, das während einer Anzahl Jahre an Zins und Zinseszins gelegt wird, berechnen, wir werden umgekehrt den heutigen Wert einer Geldsumme, die erst nach n Jahren fällig sein wird, bestimmen, wir werden Barwerte und Endwerte von periodisch wiederkehrenden Zahlungen untersuchen und die entsprechenden Formeln aufstellen und damit den ersten Schritt tun in das grosse Gebiet der finanziellen Mechanismen.

Ich werde mich bemühen, die Herleitungen der verschiedenen Beziehungen und Formeln so zu gestalten, dass das Verständnis ohne besondere über die Schulalgebra hinausgehende Kenntnisse möglich sein sollte. Ich darf also voraussetzen, dass das Aufstellen einer einfachen Buchstabengleichung und die anschliessende Auflösung nach der gesuchten Unbekannten keine wesentliche Mühe verursacht. Sollte der eine oder der andere Kursteilnehmer bei algebraischen Umformungen zusätzliche Erläuterungen benötigen, so wird in den Uebungen genügend Gelegenheit geboten, auf diese näher einzutreten.

II. Elemente der Finanzmathematik

a. Das Aufzinsen

Wird ein Kapital von beispielsweise Fr. 100.- zu 3% angelegt, so ist sein Betrag am Ende des ersten Jahres bekanntlich:

$$K_1 = 100 + 100 \cdot \frac{3}{100} = 100 \cdot (1+0{,}03) = \text{Fr. } 103.-$$

Bezeichnen wir ganz allgemein das anfängliche Kapital mit K_o, den Prozentsatz mit p, so erhalten wir:

$$K_1 = K_o + K_o \cdot \frac{p}{100} = K_o \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad (1)$$

Man bezeichnet international:

$$\frac{p}{100} = i \qquad (2)$$

i (interest, intérêt) bezeichnet somit den Zins eines anfänglichen Kapitals $K_o = 1$ nach einem Jahr:

1 Jahr

1 ———————— 1+i

Setzen wir in der Gleichung (1) $\frac{p}{100} = i$ ein, so erhalten wir für den Wert des Kapitals K_o nach einem Jahr:

$$K_1 = K_o \cdot (1+i) \qquad (3)$$

Zur Erläuterung sei folgende Tabelle angeführt:

p	i
2 %	0,02
$2\frac{1}{2}$%	0,025
3 %	0,03
$3\frac{1}{2}$%	0,035
4 %	0,04
5 %	0,05
usw.	

Lassen wir nun das Kapital K_1 wiederum 1 Jahr an Zins, so ist sein Wert am Ende des Jahres $K_1 \cdot (1+i)$ und entspricht dem Wert des Kapitals K_o nach 2 Jahren:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) = K_o \cdot (1+i) \cdot (1+i) = K_o \cdot (1+i)^2$$

Lassen wir das Kapital K_2 wieder ein Jahr an Zins, so erhalten wir für den Wert des Kapitals K_o am Ende des dritten Jahres:

$$K_3 = K_2 \cdot (1+i) = K_o \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = K_o \cdot (1+i)^3$$

Setzen wir diesen Gedankengang fort, so finden wir, dass unser anfängliches Kapital K_o am Ende des n-ten Jahres angestiegen sein wird auf den Betrag:

$$K_n = K_o \cdot (1+i)^n \qquad (4)$$

Man hat nun einfachheitshalber gesetzt:

$$1+i = r \qquad (5)$$

und r mit <u>Aufzinsungsfaktor</u> bezeichnet. Wir schreiben somit:

$$K_n = K_o \cdot r^n \qquad (6)$$

Der Aufzinsungsfaktor beträgt demnach für verschiedene Zinsfüsse:

p	r
2 %	1,02
$2\frac{1}{2}$%	1,025
3 %	1,03
$3\frac{1}{2}$%	1,035
4 %	1,04
5 %	1,05

usw.

Lassen wir also ein Kapital K_o von beispielsweise Fr. 1000.- 23 Jahre zu $3\frac{1}{2}$% an Zins und Zinseszins, so beträgt sein Wert am Ende des 23. Jahres:

$$K_{23} = 1000\cdot(1{,}035)^{23}$$

oder $$K_{23} = \underbrace{1000\cdot 1{,}035\cdot 1{,}035\cdot 1{,}035\cdot 1{,}035\cdot \ldots}_{23 \text{ mal}}$$

Diese lange Rechnung wird uns erspart, indem der Wert $(1{,}035)^{23}$ in sog. <u>Zinseszinstabellen</u> angegeben ist. Wir finden beispielsweise in den VZ 1960 $3\frac{1}{2}$% Grundlagen auf Seite 36: $(1{,}035)^{23} = 2{,}20611$, d.h. die Fr. 1000.- haben sich nach 23 Jahren auf Fr. 2206.11 erhöht, somit mehr als verdoppelt.

Wenn wir bei dieser Gelegenheit wissen möchten, wie lange wir ein Kapital an Zins und Zinseszins anlegen müssen bis es sich verdoppelt hat, so erhalten wir die Antwort aus der folgenden Gleichung:

$$K_o\cdot r^n = 2\cdot K_o$$

und daraus $$r^n = 2 \qquad (7)$$

wobei r gegeben und n gesucht ist. Mit Hilfe der Logarithmen erhält man für n die nachstehenden Werte:

p	n (Jahre)	70:p
2 %	35,0	35,0
$2\frac{1}{2}$%	28,1	28,0
3 %	23,4	23,3
$3\frac{1}{2}$%	20,1	20,0
4 %	17,7	17,5
5 %	14,2	14,0
10 %	7,3	7,0

Die Kolonne rechts zeigt uns für die gesuchte Dauer n (in Jahren) eine recht brauchbare Näherungsbeziehung, die hier ohne Beweis angegeben werden soll:

$$n \text{ ist ungefähr gleich } 70:p \qquad (8)$$

In den Uebungen werden wir Gelegenheit haben speziell die Formel (6) anzuwenden.

b. Das Abzinsen

Wir stellen die Frage umgekehrt: Wie gross ist der heutige Wert eines Kapitals, das erst in n Jahren fällig sein soll und mittlererweile an Zins und Zinseszins angelegt wird? Die Lösung dieser Aufgabe ist einfach. Es war:

$$K_n = K_o \cdot r^n \qquad (6)$$

Hier ist gegeben: K_o, r und n, gesucht wird K_n.

Nun kennen wir K_n, r und n und fragen nach K_o:

$$K_o = \frac{K_n}{r^n} = K_n \cdot \frac{1}{r^n} = K_n \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^n \qquad (9)$$

Wir bezeichnen nun $\frac{1}{r}$ als <u>Abzinsungsfaktor</u> und schreiben dafür international v:

$$v = \frac{1}{r} \qquad (10)$$

Wir erhalten dann:

$$K_o = K_n \cdot v^n \qquad (11)$$

Der heutige Wert eines Kapitales K_n, das erst in n Jahren zahlbar wird und mittlererweile zum Zinsfuss i angelegt wird, entspricht dem Produkt aus K_n und v^n (Formel (11)) bzw. dem Quotienten aus K_n und r^n (Formel (9)).

Für künftige Umformungen merken wir uns: Mit v^n multipliziert gibt gleichviel wie durch r^n dividiert, durch v^n dividiert gibt gleichviel wie mit r^n multipliziert. Speziell ist allgemein: $r^m \cdot v^n = r^{m-n} = v^{n-m}$. Dies folgt einfach aus der Beziehung $v = \frac{1}{r}$ oder $r = \frac{1}{v}$.

Der Abzinsungsfaktor ist kleiner als 1 (für positive i) und errechnet sich zu:

p	v
2 %	0,980392
$2\frac{1}{2}$%	0,975610
3 %	0,970874
$3\frac{1}{2}$%	0,966184
4 %	0,961538
5 %	0,952381

c. Barwerte von Zeitrenten

Wir wollen unsere weiteren Betrachtungen an folgende Aufgabe anknüpfen:

> Während den nächsten n Jahren muss zu Beginn jedes Jahres ein Betrag "1" bezahlt werden. Wieviel ist heute der Wert dieser n Zahlungen?

Vorerst präzisieren wir noch einmal den Begriff Barwert. Unter Barwert verstehen wir ganz allgemein den auf einen bestimmten Zeitpunkt abgezinsten oder diskontierten Wert von künftigen Zahlungen, wobei jede einzelne Zahlung diskontiert wird und die Summe den gesuchten Barwert ergibt. Statt zu sagen "heutiger Wert" sagen wir einfach Barwert. Als weiteren Begriff führen wir denjenigen der Rente ein. Eine Rente ist eine periodisch wiederkehrende Zahlung.

Die Dauer dieser periodischen Zahlung kann zu Beginn, z.B. in Jahren festgesetzt werden: 5 Jahre, 12 Jahre, 40 Jahre usw. In diesem Falle spricht man von einer Zeitrente. Ist jedoch die Dauer der Rentenzahlung abhängig von der Lebensdauer einer Person, so spricht man von einer Leibrente mit allen ihren Abarten wie Altersrente, Witwenrente, Waisenrente usw.

Die Elemente der Finanzmathematik lehren uns nun den Barwert von Zeitrenten zu bestimmen bzw. die diesbezüglichen Formeln herzuleiten. Dabei ist nur eine sinnvolle Anwendung unserer Formel (11) notwendig. Wichtig ist vorerst, dass man die Zeitpunkte (die auf den nachfolgenden "Auszahlungsschemas" mit * bezeichnet werden) der Rentenzahlungen klar festlegt. Diese Zeitpunkte sind entweder zu Beginn oder aber am Ende der betrachteten Periode (Jahr, Vierteljahr, Monat usw.) festzulegen. Im ersten Fall spricht man von einer vorschüssig zahlbaren Rente, im zweiten Fall von einer nachschüssig zahlbaren Rente. Erfolgt die Zahlung nur einmal im Jahr, so spricht man einfach von einer jährlich zahlbaren Rente, erfolgt die Zahlung in regelmässigen, d.h. äquidistanten Abständen mehrmals im Jahre (monatliche, vierteljährliche Raten usw.), so spricht man von einer unterjährig zahlbaren Rente.

Wir wollen nun den Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente "1" während n Jahren berechnen. Dieser Barwert wird international mit $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ bezeichnet. Die beiden Punkte bedeuten "vorschüssig", das n ist die Dauer der Rentenzahlung in Jahren bzw. die Anzahl der einheitlichen jährlichen Zahlungen "1". Wir betrachten das folgende Auszahlungsschema (*:Auszahlungszeitpunkte):

```
1    1    1              1    1
*    *    *              *    *
┬────┬────┬────┬─── ─────┬────┬────┬
0    1    2    3        n-2  n-1   n
```

Die erste Zahlung"1" erfolgt im Zeitpunkte 0, die zweite im Zeitpunkte 1, die dritte im Zeitpunkte 2 usw., die n-te Zahlung "1" erfolgt im Zeitpunkte n-1, d.h. zu Beginn des n-ten Jahres. Wenden wir nun unsere Formel (11) an, indem wir jede einzelne Zahlung auf den Zeitpunkt 0 diskontieren und die so erhaltenen Werte aufsummieren, so erhalten wir für den gesuchten Barwert:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} \qquad (12)$$

Dies ist die Lösung der auf Seite 6 unten gestellten Aufgabe. Durch Aufsummieren der v^n-Werte könnten wir die Barwerte berechnen. Wir wollen aber eine entsprechende Formel herleiten, indem wir beide Seiten der Gleichung (12) mit (1-v) multiplizieren:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot (1-v) = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} - v - v^2 - \ldots - v^{n-1} - v^n = 1-v^n$$

$$\text{daraus:} \qquad \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{1-v} \qquad (13)$$

Untersuchen wir noch den Ausdruck 1-v:

$$1-v = 1-\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = \frac{i}{r} = i \cdot v$$

$$1-v = i \cdot v = d \qquad (14)$$

d heisst <u>Diskont</u> und stellt den Barwert des in einem Jahre fälligen Zinses i eines Kapitals "1" dar. Ein zu Beginn des Jahres vorhandenes Kapital "1" kann aufgeteilt werden in die beiden Teile v und d. Am Ende des Jahres ist v auf $v \cdot r = 1$ und d auf $d \cdot r = i \cdot v \cdot r = i$ angewachsen, das ursprüngliche Kapital "1" also auf 1+i. d hat aber keine weitere praktische Bedeutung.

Wir können (13) also auch schreiben als:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d} \qquad (15)$$

Der Diskont errechnet sich für verschiedene Zinsfüsse zu:

p	d
2 %	0,019608
2½%	0,024390
3 %	0,029126
3½%	0,033816
4 %	0,038462
5 %	0,047619

usw.

Ist die <u>Zeitrente "1" jährlich nachschüssig zahlbar</u>, so haben wir folgendes Auszahlungsschema:

	1	1	1	1	1
	*	*	*	*	*
0	1	2	3	n-1	n

Die erste Zahlung erfolgt im Zeitpunkte 1, die zweite im Zeitpunkte 2 usw., die n-te Zahlung am Ende des n-ten Jahres, also im Zeitpunkte n. Der entsprechende Barwert wird mit $a_{\overline{n}|}$ bezeichnet (ohne Punkte). Wir erhalten analog wie in der Beziehung (12):

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n \qquad (16)$$

Multiplizieren wir hier beiden Seiten der Gleichung mit (1-v), so erhalten wir:

$$a_{\overline{n}|}\cdot(1-v) = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n - v^2 - v^3 - \ldots - v^n - v^{n+1} = v - v^{n+1}$$
$$= v\cdot(1-v^n)$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{v(1-v^n)}{i\cdot v} =$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \qquad (17)$$

Zwischen $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ und $a_{\overline{n}|}$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = r\cdot a_{\overline{n}|} \qquad (18)$$

$$a_{\overline{n}|} = v\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad (19)$$

Den Gleichungen (12) und (16) entnehmen wir:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \qquad (20)$$

und $$a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+1}|} - 1 \qquad (21)$$

Wenn wir also über eine Tabelle mit den "vorschüssigen Barwerten" verfügen, so können wir ohne weiteres die "nachschüssigen Barwerte" bestimmen und umgekehrt.

d. Endwerte von Zeitrenten

Unter Endwert einer Zeitrente versteht man allgemein den aufgezinsten Wert am Ende des n-ten Jahres von n jährlichen Rentenzahlungen. Auch hier müssen wir die Auszahlungszeitpunkte der jährlichen Zahlungen genau festlegen.

Soll nun der Endwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente "1" berechnet werden, so betrachten wir unser Auszahlungsschema auf Seite 7 unten. Vom Zeitpunkt n richten wir unser Augenmerk rückwärts auf die bereits erfolgten Rentenzahlungen. Das internationale Symbol dieses Endwertes ist $\ddot{s}_{\overline{n}|}$. Wenden wir nun unsere Formel (6) an, so erhalten wir für den gesuchten Endwert:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \qquad (22)$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (22) mit (1-v), so erhalten wir:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} \cdot (1-v) = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n - 1 - r - r^2 - r^3 - \dots - r^{n-1} = r^n - 1$$

da 1-v = d folgt: $$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{d} \qquad (23)$$

Analog erhält man für den Endwert $s_{\overline{n}|}$ (ohne Punkte) einer jährlich nachschüssig zahlbaren Zeitrente "1" (siehe Auszahlungsschema auf Seite 9 oben):

$$s_{\overline{n}|} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \qquad (24)$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit (r-1):

$$s_{\overline{n}|} \cdot (r-1) = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n - 1 - r - r^2 - r^3 - \dots - r^{n-1} = r^n - 1$$

da r-1 = i folgt: $$s_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{i} \qquad (25)$$

Für das Gedächtnis merken wir uns, dass der Nenner der Formeln (15) und (23) für die jährlich vorschüssig zahlbare Zeitrente d, der Nenner der Formeln (17) und (25) für die jährlich nachschüssig zahlbare Zeitrente i beträgt.

Zwischen $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ und $s_{\overline{n}|}$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r \cdot s_{\overline{n}|} \tag{26}$$

$$s_{\overline{n}|} = v \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} \tag{27}$$

Den Gleichungen (22) und (24) entnehmen wir:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \tag{28}$$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n-1}|} \tag{29}$$

Eine Tabelle mit den "vorschüssigen Endwerten" erlaubt uns somit ohne weiteres die "nachschüssigen Endwerte" zu bestimmen und umgekehrt.

Zwischen den Barwerten $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ bzw. $a_{\overline{n}|}$ und den Endwerten $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ bzw. $s_{\overline{n}|}$ bestehen die folgenden Relationen, die durch Vergleich der Formeln (15) bzw. (17) und (23) bzw. (25) ohne weiteres verifiziert werden können:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{30}$$

$$s_{\overline{n}|} = r^n \cdot a_{\overline{n}|} \tag{31}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} \tag{32}$$

$$a_{\overline{n}|} = v^n \cdot s_{\overline{n}|} \tag{33}$$

Wir haben nun die wichtigsten Beziehungen der Elemente der Finanzmathematik kennen gelernt. Wir verzichten hier auf die genaue Herleitung der Formeln für die unterjährige Rentenzahlung und begnügen uns mit der Angabe von Faktoren, mit welchen die aus den Formeln (15) und (17) bzw. (23) und (25) erhaltenen Werte multipliziert werden müssen um die Bar- bzw. Endwerte bei m unterjährig zahlbaren Rentenraten $1/m$ zu erhalten. Für $m = 4$ (vierteljährliche Raten zu $1/4$) sieht das Auszahlungsschema einer vorschüssig zahlbaren Rente wie folgt aus:

1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4

* * * * * * * * * * * *

0 1 2 n-1 n

Es ist:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = Q \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad (34)$$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = Q' \cdot a_{\overline{n}|} \qquad (35)$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = Q \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad (36)$$

$$s^{(m)}_{\overline{n}|} = Q' \cdot s_{\overline{n}|} \qquad (37)$$

Die Werte von Q und Q' sind vom Zinsfuss und von der Ratenzahl m abhängig, nicht aber von der Dauer n und werden aus der nachstehenden Tabelle entnommen:

	m = 2		m = 4		m = 12	
p	Q	Q'	Q	Q'	Q	Q'
2 %	0,995074	1,004975	0,992617	1,007469	0,990981	1,009134
$2\frac{1}{2}$%	0,993865	1,006211	0,990807	1,009327	0,988771	1,011407
3 %	0,992665	1,007445	0,989010	1,011181	0,986579	1,013677
$3\frac{1}{2}$%	0,991473	1,008675	0,987228	1,013031	0,984405	1,015942
4 %	0,990290	1,009902	0,985459	1,014877	0,982247	1,018204
5 %	0,987950	1,012348	0,981961	1,018559	0,977982	1,022715

Beispiel für $3\frac{1}{2}$%: $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{25}|} = 0{,}984405 \cdot \ddot{a}_{\overline{25}|} = 0{,}984405 \cdot 17{,}05837 = 16{,}79234$

Wir verlassen nun die eigentliche Finanzmathematik, wobei wir aber unsere Formeln und Herleitungen nicht vergessen dürfen. Wir erinnern uns speziell an die sukzessive Diskontierung von künftigen Zahlungen und an ihre anschliessende Summation wie sie für die Aufstellung der Beziehungen (12) und (16) zur Anwendung gelangten.

III. Sterbetafeln

Wir kennen bereits die Sterbenswahrscheinlichkeiten. Wir haben gehört, dass diese aus Beobachtungen an grossen Personenbeständen, wie z.B. die Landesbevölkerung, den Bestand einer grossen öffentlichrechtlichen Pensionskasse usw. hergeleitet werden. Die direkt aus der Beobachtung erhaltenen Wahrscheinlichkeiten sind sog. "rohe" Werte, welche graphisch dargestellt einen mehr oder weniger zackigen Verlauf der betreffenden Kurve ergeben würden. Die Tendenz des Verlaufes wird immerhin umso besser erkennbar, je grösser der beobachtete Personenbestand ist, aus dem die Wahrscheinlichkeiten ermittelt worden sind. In der Praxis stellt sich die Frage nach einer Ausgleichung, d.h. nach einer Glättung der rohen Werte. Auf die verschiedenen Verfahren kann in diesem Kurs nicht eingegangen werden. Wir wollen einfach zur Kenntnis nehmen, dass die publizierten Sterbenswahrscheinlichkeiten, beispielsweise der Tafeln VZ 1960 oder SM 1958/63, vorerst aus der Beobachtung hergeleitet, dann ausgeglichen wurden und uns nun für die Konstruktion einer sog. Sterbetafel oder Ueberlebensordnung oder Absterbeordnung (diese drei Ausdrücke bedeuten dasselbe) zur Verfügung stehen. Damit wir genau verstehen was eigentlich eine Sterbetafel ist, wollen wir den Beginn einer solchen konstruieren.

Der Tafel VZ 1960 entnehmen wir auf Seite 40, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit eines 20jährigen Mannes 0,00083 beträgt, d.h. von beispielsweise 100 000 20jährigen Männern sterben im Laufe des nächsten Jahres 100 000 mal 0,00083 = 83. Die zu Beginn des Jahres als vorhanden angenommenen 20jährigen Männer bezeichnen wir international mit l_{20} (living), die zwischen den Altern 20 und 21 sterbenden 83 Männer mit d_{20} (dead), die am Ende des Jahres verbleibenden 100 000 - 83 = 99 917, nun 21jährigen Männer mit l_{21}. Wegen den für jüngere Personen sehr kleinen Sterbenswahrscheinlichkeiten von einigen Zehntausendstel muss der Ausgangswert der Lebenden gross gewählt werden, damit beim Auf- und Abrunden der berechneten Zahl der Todesfälle die dabei auftretenden Fehler klein bleiben.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit eines 21jährigen Mannes beträgt 0,00084, d.h. von den übriggebliebenen 99 917 Männern sterben im Laufe des nächsten Jahres 99 917 mal 0,00084 = 83,9 aufgerundet auf 84. Entsprechend bezeichnen wir diese Zahl mit d_{21}. Am Ende des zweiten Jahres werden also noch 99 917 - 84 = 99 833 Männer am Leben sein. Ihr Alter wird dann 22 Jahre betragen, wir bezeichnen 99 833 mit l_{22}. Sie sehen leicht wie es weiter geht:

$$d_{22} = 0{,}00085 \text{ mal } 99\,833 \doteq 85$$

$$l_{23} = 99\,833 - 85 = 99\,748$$

$$d_{23} = 0{,}00086 \text{ mal } 99\,748 = 86$$

$$l_{24} = 99\,748 - 86 = 99\,662$$

usw.

aus $l_{50} = 94\,796$

$$d_{50} = 0{,}00567 \text{ mal } 94\,796 = 537$$

$$l_{51} = 94\,796 - 537 = 94\,259$$

usw. bis zu einem
höchsten Alter ω,
für welches gilt

$$l_{\omega} = 0$$

Obige Ueberlegungen seien nachfolgend in einer Tabelle zusammengestellt: Das erreichte Alter bezeichnet man für einen Mann mit x, für eine Frau mit y. Die Sterbenswahrscheinlichkeit wird international mit q_x für einen Mann und mit q_y für eine Frau bezeichnet. Die erste Kolonne enthält das erreichte Alter x, die zweite Kolonne enthält die Zahl der noch lebenden Männer, wobei der Anfangswert gross, aber sonst beliebig angenommen ist (l_{20} = 100 000), die dritte Kolonne gibt die Zahl der im einjährigen Intervall x/x+1 eintretenden Todesfälle, die vierte Kolonne enthält die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x:

x	l_x	d_x	q_x
20	100 000	83	0,00083
21	99 917	84	0,00084
22	99 833	85	0,00085
23	99 748	86	0,00086
24	99 662		
.			
.			
.			
50	94 796	537	0,00567
51	94 259		

usw.

Die Reihe der l_x nennt man nun Sterbetafel, Ueberlebensordnung oder Absterbeordnung. Sie gibt an, wieviel von einer willkürlich angenommenen Anzahl von Personen (Männer und Frauen getrennt) des Anfangsalters x_o im Alter x noch am Leben sind, wenn auf sie die aus der Beobachtung hervorgegangenen (und dann ausgeglichenen) einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten angewandt werden. Selbstverständlich lässt sich die Reihe der l_x auch aus den einjährigen Ueberlebenswahrscheinlichkeiten p_x konstruieren. Dieses Vorgehen würde den Umweg über die d_x vermeiden.

Das Anfangsalter x_o kann wie bei den VZ-Tafeln 20 Jahre betragen, bei den Sterbetafeln, welche für die Berechnung der Tarife der Gruppenversicherungen verwendet werden, ist $x_o = 15$, bei den Volkssterbetafeln von jeher $x_o = 0$. Da die Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer und Frauen verschieden sind, ist auch der Verlauf der l_x und der l_y voneinander verschieden.

Aus einer Sterbetafel können nun zahlreiche demographische Angaben errechnet werden. Vorerst erkennen wir sofort, dass aus der Reihe der l_x sämtliche Ueberlebenswahrscheinlichkeiten p_x gleichsam rückwärts rekonstruiert werden können durch die Beziehung:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (38)$$

Für p_{40} beispielsweise: $$p_{40} = \frac{l_{41}}{l_{40}} = \frac{97741}{97920} = 0{,}99817 \quad \text{(VZ 1960)}$$

Weiter ermittelt man die Zahl der jährlichen Todesfälle d_x im einjährigen Intervall $x/x+1$ aus der Beziehung:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{39}$$

Für die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x erhält man:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x \tag{40}$$

und daraus: $$p_x + q_x = 1 \tag{40'}$$

D.h., es ist sicher (Wahrscheinlichkeit = 1), dass ein zu Beginn des Jahres lebender Mann am Ende desselben Jahres entweder noch lebt oder gestorben ist.

Wir können aber auch andere Wahrscheinlichkeiten aus der l_x-Reihe bestimmen. Wenn wir z.B. fragen, wieviel von hundert 30jährigen Männern das Alter von 65 Jahren voraussichtlich erleben werden, so gibt uns die Tafel VZ 1960:

$$l_{30} = 99\,114 \quad \text{und} \quad l_{65} = 78\,543$$

Von den 99114 30jährigen Männern unserer "fiktiven Gesamtheit" leben im Alter von 65 Jahren noch deren 78543. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 30jähriger Mann im Alter 65 noch lebt, ist daher:

$$_{35}p_{30} = \frac{l_{65}}{l_{30}} = \frac{78543}{99114} = 0{,}792$$

Von hundert 30jährigen Männern darf also erwartet werden, dass rund 79 das Pensionierungsalter von 65 Jahren erleben werden. Fragen wir nach der Zahl der zu erwartenden Todesfälle, so entnehmen wir derselben l_x-Reihe, dass von 99114 30jährigen Männern im Laufe der nächsten 35 Jahre 99114 - 78543 = 20571 sterben werden. Die Wahrscheinlichkeit eines 30jährigen Mannes vor Erreichen des 65. Altersjahres zu sterben beträgt also:

$$_{35}q_{30} = \frac{l_{30} - l_{65}}{l_{30}} = \frac{20571}{99114} = 0{,}208$$

d.h. von hundert 30jährigen Männern werden bis zum Alter 65 deren 21 sterben.

Allgemein beträgt die <u>t-jährige Ueberlebenswahrscheinlichkeit</u> eines x-jährigen Mannes:

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (41) $$

die <u>t-jährige Sterbenswahrscheinlichkeit</u>:

$$ {}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = 1 - {}_tp_x \qquad (42) $$

Selbstredend ist auch hier die Summe der t-jährigen Wahrscheinlichkeiten gleich 1: Es ist sicher, dass ein x-jähriger Mann nach t Jahren entweder noch lebt oder aber gestorben ist.

Eine weitere Wahrscheinlichkeit, die wir bei den Todesfallversicherungen antreffen werden, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein heute x-jähriger Mann nach t Jahren noch lebt und im Laufe des darauffolgenden Jahres, d.h. im Intervall x+t/x+t+1 stirbt. Die Zahl der im genannten Intervall eintretenden Todesfälle ist, in Anlehnung an Formel (39):

$$ d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1} $$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, die man mit ${}_{t|}q_x$ bezeichnet, ist somit:

$$ {}_{t|}q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (43) $$

Es seien noch zwei Begriffe erläutert, deren numerischer Wert ebenfalls aus der l_x-Reihe berechnet wird, nämlich die "wahrscheinliche Lebensdauer" und die "mittlere Lebenserwartung".

Die <u>wahrscheinliche Lebensdauer</u> eines x-jährigen entspricht der <u>Zeitspanne t</u>, die verstreicht, bis die Anzahl der lebenden l_x Personen auf die Hälfte reduziert ist. Diese Definition kann ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$ l_{x+t} = \frac{l_x}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1/2 \quad \text{oder} \quad {}_tp_x = 1/2 $$

Aus der Formel (42) folgt, dass auch ${}_tq_x = 1/2$ sein muss, d.h. dass es für den x-jährigen nach der wahrscheinlichen Lebensdauer t gleich wahrscheinlich ist noch zu leben oder bereits gestorben zu sein.

Aus der Ueberlebensordnung lässt sich die wahrscheinliche Lebensdauer leicht berechnen. Soll diese beispielsweise für einen 52jährigen Mann bestimmt werden, so entnimmt man aus der VZ-Tafel $l_{52} = 93\ 666$. Die Hälfte ist gleich 46 833. Die nächsten Zahlen der l_x-Reihe finden wir bei $l_{76} = 48\ 766$ und bei $l_{77} = 45\ 312$. Es ist:

$$\frac{l_{76}}{l_{52}} = 0{,}52 \qquad \text{und} \qquad \frac{l_{77}}{l_{52}} = 0{,}48$$

Die wahrscheinliche Lebensdauer eines 52jährigen Mannes beträgt somit rund $24\frac{1}{2}$ Jahre.

Hier ist aber, wie bei allen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen, vor falschen Deutungen oder sogar Prophezeiungen zu warnen! Diese Zahl ist ein Durchschnittswert, der für eine grosse Zahl von beobachteten Personen zutrifft, für den Einzelnen jedoch nichts auszusagen vermag. Dies gilt auch für die nachfolgend behandelte mittlere Lebenserwartung.

Die mittlere Lebenserwartung entspricht der Anzahl Jahre, die ein x-jähriger der fiktiven Gesamtheit der l_x im Mittel noch durchleben wird.

Wenn wir zuerst annehmen, dass die jährlichen Todesfälle jeweils am Ende des Jahres erfolgen, so durchleben die l_x Personen im ersten Jahre zusammen l_x Jahre, nämlich jede Person 1 Jahr. Im zweiten Jahr zusammen l_{x+1} Jahre usw. Die mittlere Lebensdauer ist bei dieser Betrachtungsweise also:

$$\frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_\omega}{l_x}$$

Wenn wir jetzt annehmen, dass die jährlichen Todesfälle jeweils am Anfang des Jahres erfolgen, so durchlebt die fiktive Gesamtheit im ersten Jahr zusammen l_{x+1} Jahre, im zweiten Jahr l_{x+2} Jahre usw. Die mittlere Lebensdauer errechnet sich hier zu:

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots + l_\omega}{l_x}$$

Da man in erster Näherung annehmen kann, dass sich die Todesfälle gleichmässig über das Jahr verteilen oder was auf das gleiche Ergebnis führt, jeweils in der Mitte des Jahres erfolgen, wird die mittlere Lebenserwartung definiert als Mittel der beiden letzten Beziehungen und international mit $\overset{\circ}{e}_x$ (expectation of life) bezeichnet. Es ist also:

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{l_x + 2 \cdot l_{x+1} + 2 \cdot l_{x+2} + 2 \cdot l_{x+3} + \ldots + 2 \cdot l_\omega}{2 \cdot l_x}$$

Wenn wir im Zähler das erste Glied durch $2 \cdot l_x$ ersetzen und dafür am Schluss l_x wieder wegnehmen und durch 2 kürzen, so erhalten wir für die mittlere Lebenserwartung:

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \cdot (l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega) - 1/2 \qquad (44)$$

Man summiert also die l_x vom Alter x an bis ans Ende der Tafel, dividiert diese Summe durch l_x und vermindert den Quotienten um 0,5. Für einen 52jährigen Mann berechnet man für die mittlere Lebenserwartung mit den Tafeln VZ 1960 23,90 Jahre.

Die nachfolgende Tabelle enthält die mittleren Lebenserwartungen (in Jahren) aus schweizerischen Volkssterbetafeln. Die im Laufe von rund 35 Jahren eingetretene Sterblichkeitsabnahme ist deutlich festzustellen:

Alter	SM 1921/30 Männer	SM 1931/41 Männer	SM 1948/53 Männer	SM 1958/63 Männer	SM 1958/63 Frauen
0	58,1	60,9	66,4	68,7	74,1
1	61,3	63,2	67,8	69,4	74,5
5	58,6	60,3	64,4	65,8	70,8
15	49,5	51,1	54,8	56,2	61,1
20	45,2	46,7	50,2	51,5	56,2
30	36,8	38,1	41,0	42,2	46,5
40	28,3	29,5	31,9	32,8	37,0
50	20,5	21,3	23,2	24,0	27,8
60	13,8	14,3	15,7	16,2	19,2
70	8,3	8,6	9,5	10,0	11,7
80	4,6	4,6	5,2	5,5	6,1

Wir haben gesehen, dass es gelingt, aus der Beobachtung einer grossen kunterbunt zusammengesetzten Personengesamtheit, deren Altersverteilung a priori nicht gleichmässig sein wird, eine fiktive Gesamtheit der l_x zu konstruieren, welche die Sterblichkeit des beobachteten Personenbestandes in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit zu charakterisieren vermag. Im Gegensatz zur Wirklichkeit strotzt geradezu diese konstruierte Gesamtheit von Regelmässigkeit. Der graphische Verlauf der Anzahl noch lebenden Personen - den Sie in einer Uebung selber gezeichnet haben - nimmt von 100 000 stetig ab und erreicht in einer eleganten Schlaufe im Alter ω die Zahl 0. Man hat aus der Beobachtung ein Modell konstruiert, aus dem, wie wir feststellen konnten, die Sterblichkeitsverhältnisse der beobachteten Personengesamtheit unter allen Aspekten ermittelt werden können. Es liegt nun auf der Hand dieses Modell für die Bestimmung von versicherungstechnischen Barwerten, unter Zuhilfenahme der Finanzmathematik, heranzuziehen. An einem einfachen Beispiel soll dies gezeigt werden:

IV. Die Erlebensfalleistung

Wir wollen den Barwert eines Kapitales "1" berechnen, das in n Jahren an einen heute x-jährigen Mann ausgerichtet werden soll, unter der wichtigen Bedingung jedoch, dass er in n Jahren noch lebt. Diese Versicherungsform bezeichnet man als "Erlebensfallversicherung".

Unsere l_x-Reihe wird nun wie folgt angewandt: Wir nehmen an, dass alle in unserer fiktiven Gesamtheit figurierenden Personen des Alters x, wobei x das Eintrittsalter unseres Versicherten bezeichnet, eine solche Erlebensfallversicherung abschliessen wollen. Alle l_x Personen entrichten somit den zu berechnenden Barwert, den wir mit ${}_nE_x$ bezeichnen. Nach n Jahren werden noch l_{x+n} Personen vorhanden sein. Diesen müssen wir dann das vereinbarte Kapital "1" auszahlen.

Da wir einen "gerechten" Barwert ermitteln wollen, stellen wir zu Beginn ein wichtiges Prinzip auf, nämlich dass die Einnahmen gleich sein sollen wie die Ausgaben. Als Kenner der Elemente der Finanzmathematik muss uns diese Ausdrucksweise als zumindest unpräzis erscheinen, indem es sehr von Bedeutung ist, wann die Einnahmen eingehen und wann die Ausgaben stattfinden werden. Darum präzisieren wir unser Prinzip und postulieren:

$$\begin{matrix}\text{Barwert der} \\ \text{Einnahmen}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Barwert der} \\ \text{Ausgaben}\end{matrix} \tag{45}$$

Dieses Prinzip zieht sich wie ein roter Faden durch die ganze Versicherungstechnik hin und hat daher auch einen Namen erhalten, nämlich Aequivalenzprinzip. Von diesem Prinzip der zahlenmässigen Aequivalenz zwischen Aufwand und Leistung ausgehend, errechnen sich die Kosten aller denkbaren Arten von Lebensversicherungen und damit auch von Personalvorsorgen. Dabei interessieren uns hier lediglich die Nettokosten, welche durch die eigentliche Versicherungsleistung verursacht werden, d.h. wir vernachlässigen bewusst Verwaltungskosten usw.

Gehen wir nun zurück zu unserer Erlebensfalleistung. Jede der l_x Personen zahlt den Beitrag ${}_nE_x$. Es ist keine weitere Beitragszahlung vorgesehen, also ist der Barwert der Einnahmen einfach $l_x \cdot {}_nE_x$. Wie steht es nun mit dem Barwert der Ausgaben? In n Jahren müssen wir den noch lebenden l_{x+n} Personen das Kapital "1" auszahlen, total also $1 \cdot l_{x+n} = l_{x+n}$. Da diese Kapitalien aber erst in n Jahren fällig werden, haben wir heute einen Wert von $v^n \cdot l_{x+n}$. Dieses Produkt stellt somit den Barwert der Ausgaben dar. Nach dem Aequivalenzprinzip müssen wir also folgende Gleichung aufstellen:

$$l_x \cdot {}_nE_x = v^n \cdot l_{x+n} \tag{46}$$

oder

$${}_nE_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_np_x \tag{47}$$

Diese letzte Beziehung ist wichtig. Sie besagt nämlich, dass der Barwert der Erlebensfallversicherung und damit auch die Einmalprämie, der Preis der Erlebensfallversicherung gleich ist dem finanzmathematischen Barwert des zu zahlenden Kapitals, also v^n, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass dieses Kapital ausbezahlt werden muss. Das Produkt eines Geldbetrages mal eine Wahrscheinlichkeit nennt man allgemein einen mathematischen Erwartungswert.

Wir wollen den ersten Teil unserer Gleichung (47) noch etwas anders schreiben, indem wir den Bruch mit v^x erweitern:

$$
{}_nE_x = \frac{v^x \cdot v^n \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} \qquad (48)
$$

Im Ausdruck rechts haben wir nun erreicht, dass der Exponent des Abzinsungsfaktors gleich dem Index des l_x-Wertes ist, also x+n im Zähler und x im Nenner. Es ist daher sinnvoll für einen bestimmten Zinsfuss die l_x mit v^x zu multiplizieren. Die so erhaltenen Produkte werden tabelliert und bilden die sog. diskontierten Zahlen der Lebenden. Man bezeichnet sie international mit D_x. Es ist also:

$$
v^x \cdot l_x = D_x \qquad (49)
$$

und entsprechend: $v^{x+n} \cdot l_{x+n} = D_{x+n}$

Die Gleichung (48) kann somit geschrieben werden als:

$$
{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (50)
$$

Die diskontierte Zahl der Lebenden ist die erste der sog. Kommutationszahlen, von denen es eine ganze Reihe gibt. Eine Kommutationszahl ist also ein Produkt aus einerseits einem finanzmathematischen Element und andererseits einem aus statistischen Beobachtungen hergeleiteten Grundwert. Speziell in der Personalvorsorge gibt es jedoch recht komplizierte Kommutationszahlen, welche neben finanzmathematischen Elementen und statistischen Grundwerten sogar noch ganze versicherungstechnische Barwerte enthalten. Speziell werden die Summen von Kommutationszahlen auch wieder mit Kommutationszahl bezeichnet. Wir werden später darauf zurückkommen.

Aus der Beziehung (47) sehen wir, dass der Barwert der Erlebensfalleistung nicht nur kleiner ist als 1, sondern sogar kleiner als v^n, indem $_np_x$ als Wahrscheinlichkeit kleiner ist als 1. Im Gegensatz zum Barwert eines Kapitals, das in n Jahren sicher auszuzahlen ist und dessen Behandlung in das Gebiet der elementaren Finanzmathematik gehört, muss beim versicherungstechnischen Barwert noch berücksichtigt werden, dass die in n Jahren fällige Zahlung nicht mit Sicherheit erfolgen wird.

Die Verhältnisse sind rein algebraisch gesehen nicht kompliziert. Sie werden aber interessant, wenn man sich die Frage stellt, was man eigentlich noch bei der Anwendung des Modells der l_x-Reihe überhaupt macht, welche Voraussetzung dabei unters Eis gegangen sein könnte. Wir wissen, dass die l_x-Reihe auf Beobachtungen beruht, die sich etwa auf 5 bis 10 Jahre erstrecken. Sogar bei ihrer Publikation wird sie somit immer auf mehr oder weniger weit zurückliegende Ereignisse beruhen. Wenn wir unsere Aequivalenzbeziehung aufstellen um den Barwert der Erlebensfalleistung zu berechnen, so nehmen wir doch stillschweigend an, dass sich die Sterblichkeit in der Zukunft weiter so verhalten wird wie in der zurückliegenden Beobachtungsperiode. Laufende Beobachtungen zeigen aber, dass die Sterblichkeit des Menschen immer noch die Tendenz hat, abzunehmen (siehe Tabelle auf Seite 19 unten). Der an sich verständliche Eindruck, dass die beobachtete Sterblichkeitsabnahme lange genug gedauert habe oder doch wenigstens nicht mehr lange anhalten könne, hat bewirkt, dass immer wieder Versuche angestellt wurden, die diesbezüglichen Gesetze, Launen und Schliche der Natur irgendwie mathematisch zu erfassen. Die meisten dieser Versuche haben bei der Bekanntgabe ihrer Resultate den Praktiker beruhigt, indem er sich von unliebsamen Ueberraschungen in der Zukunft geschützt glaubte, ja vielleicht sogar die Meinung vertrat, die diesen Lösungsversuchen zu Grunde gelegten Hypothesen seien gar zu pessimistisch aufgestellt worden und dass daher die beispielsweise konstruierte "unendlich ferne Sterbetafel" in Wirklichkeit ja doch nie erreicht werde. Weit gefehlt! Man kann sich eines unangenehmen Gefühls nicht erwehren, wenn man heute die Schwäche mancher solcher Veröffentlichung feststellen muss, indem die heutige Sterblichkeit bereits unter derjenigen solcher unendlich fernen Sterbetafeln liegt.

Diese Ausführungen sollen Ihnen zeigen, dass eine einfach aufzustellende Gleichung wie z.B. die Gleichung (46) stillschweigende Voraussetzungen enthält, die schwerwiegend sein können. Leben nämlich nach n Jahren mehr Männer als unsere Sterbetafel erwarten lässt, wird also die Sterblichkeit bis zur Fälligkeit des Kapitals abgenommen haben, so wird der seinerzeit ausgerechnete Barwert sich als nicht genügend erweisen. Jedenfalls ist es ein Gebot der Vorsicht, dass man für Erlebensfalleistungen nur solche Sterbetafeln verwendet, welche eine kleinere Sterblichkeit wiedergeben als z.B. die Volkssterbetafeln. Ob dann der aus der Beziehung (50) erhaltene Wert aus Sicherheitsgründen noch verstärkt werden muss, hat der Versicherungsmathematiker selber zu entscheiden. Im Vorwort der VZ-Grundlagen finden Sie eine von Herrn Prof. Nolfi vorgeschlagene Lösung des Problems, die nicht nur theoretisch überaus interessant ist, sondern auch die Berechnung von Rentenbarwerten, "unter Berücksichtigung der anhaltenden Sterblichkeitsabnahme" ermöglicht. Aus Zeitmangel können wir leider in diesem Kurs nicht weiter auf diese wertvolle Arbeit eingehen.

Wir gehen nun einen Schritt weiter. Dabei werden wir, um Zeit zu gewinnen, nicht mehr bei jeder Gelegenheit auf die zu erwartende Sterblichkeitsabnahme hinweisen, sondern einfach stillschweigend an sie denken.

V. Rentenbarwerte

Was eine Rente ist, wissen wir schon. Im Gegensatz zum $\ddot{a}_{\overline{n|}}$, welches unter der Annahme ermittelt wird, dass die Rente sicher genau n Jahre bezahlt werden wird, wollen wir den Barwert einer Leibrente "1" bestimmen, welche sofort, d.h. unmittelbar nach Erhalt bzw. Sicherstellung des Barwertes, an einen heute x-jährigen Mann solange ausgerichtet werden soll, als er noch lebt. Die Rente sei vorerst jährlich vorschüssig zahlbar, der betreffende Barwert wird international mit $\ddot{a}_x$ bezeichnet.

Ganz analog wie bei der Erlebensfalleistung, es handelt sich ja um sukzessive Erlebensfalleistungen, ermitteln wir die Barwerte der Einnahmen und Ausgaben, wobei die Zeitpunkte der Auszahlungen berücksichtigt werden müssen (siehe das Auszahlungsschema auf Seite 7 unten) und setzen diese in einer Gleichung einander gleich:

$$l_x \cdot \ddot{a}_x = l_x + v \cdot l_{x+1} + v^2 \cdot l_{x+2} + v^3 \cdot l_{x+3} + \ldots \qquad (51)$$

Die Summe rechts geht bis zum Alter ω und bricht dann dort automatisch ab, indem alle l_x für $x \geq \omega$ null sind. Daher brauchen wir das letzte Glied nicht besonders zu schreiben. Erweitern wir mit v^x, so erhalten wir:

$$D_x \cdot \ddot{a}_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots$$

oder

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{D_x} \cdot (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots) \qquad (52)$$

Wir führen nun eine neue Kommutationszahl ein, nämlich die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden und schreiben dafür international:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \qquad (53)$$

Die Beziehung (52) wird dann:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad (54)$$

Diese Formel ist auffällig einfach, wenn man bedenkt, dass man die noch verbleibende Lebensdauer unseres Rentenbezügers nicht kennt bzw. nicht sichtbar verwendet hat.

Es sei hier noch auf eine interessante Beziehung hingewiesen. Sehr oft wird bei Diskussionen über Vorsorgeeinrichtungen, Pensionierungen usw. die Frage nach der bereits behandelten Lebenserwartung gestellt. Wenn man dann für einen 65jährigen männlichen Rentenberechtigten einen Wert von etwa 14 Jahren angibt, so errechnet der Laie den heutigen Wert einer Jahresrente von beispielsweise Fr. 1 000.- zu Fr. 14 000.-. Wir wissen, dass das falsch ist, bestimmt sich doch der Barwert einer während 14 Jahren vorschüssig zahlbaren Zeitrente von Fr. 1 000.-, berechnet zu $3\frac{1}{2}\%$, zu nur Fr. 11 303.-. Diesen Fehler werden wir nicht begehen, aber wir werden uns fragen, ob eine Beziehung besteht zwischen dem Laibrentenbarwert $\ddot{a}_x$ und dem Zeitrentenbarwert $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, wenn für n die mittlere Lebenserwartung $\mathring{e}_x$ eingesetzt wird. Es gelingt nun zu beweisen, dass

$$\ddot{a}_x < \ddot{a}_{\overline{\mathring{e}_x+1/2}|} \qquad (55)$$

Der Leibrentenbarwert ist also kleiner als der Zeitrentenbarwert (gleicher Rechnungszinsfuss natürlich vorausgesetzt) für die Rentenzahlungsdauer $\mathring{e}_x+1/2$, wobei das 1/2 weggelassen werden kann für Alter, je nach Absterbeordnung, die unter etwa 70 bis 75 Jahren liegen. Betrachten wir die Verhältnisse bei den Tafeln VZ 1960 3½%, wobei wir für die nicht ganzzahligen Dauern n und m die Zeitrentenbarwerte linear interpolieren:

x	$\ddot{a}_x$	$n=\mathring{e}_x+1/2$	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	$m=\mathring{e}_x$	$\ddot{a}_{\overline{m}|}$
35	21,364	39,90	22,076	39,40	21,945
45	18,409	30,53	19,225	30,03	19,047
55	14,860	21,92	15,659	21,42	15,416
65	10,989	14,52	11,624	14,02	11,315
75	7,372	8,86	7,768	8,36	7,388
76	7,053	8,40	7,419	7,90	7,036

Die obigen Zahlen bestätigen die Ungleichung (55), deren strenger Beweis nicht ganz einfach ist.

Wenn die lebenslängliche <u>Leibrente jährlich nachschüssig zahlbar ist</u>, verschwindet einfach das erste Glied der rechten Seite unserer Gleichung (51) und wir erhalten für den gesuchten Barwert a_x (ohne Punkte):

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1} - D_x}{D_x} = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \ddot{a}_x - 1 \qquad (56)$$

Wenn die Leibrente nicht einmal jährlich, sondern in m Raten zu $1/m$ ausgerichtet werden soll, so lassen sich folgende Näherungsbeziehungen, die jedoch für die Praxis in der Regel genügen, herleiten. Leider können wir auf die Herleitung aus Zeitgründen nicht eingehen. Die nachstehenden Formeln entstehen durch lineare Interpolation der Kommutationszahlen:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad (57)$$

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad (58)$$

Berechnen wir das Korrekturglied auf drei Stellen genau, so erhalten wir:

m	$\frac{m-1}{2m}$
2	0,250
4	0,375
12	0,458

Wir beachten, dass das Korrekturglied beim "vorschüssigen Barwert" subtrahiert, beim "nachschüssigen Barwert" dagegen addiert werden muss. Das Auszahlungsschema auf Seite 12 oben für m = 4 gilt selbstverständlich auch für eine in vierteljährlichen vorschüssig zahlbaren Leibrente "1".

Wir merken uns noch die Bedeutungen von $\ddot{a}_x$ bzw. a_x:

1. Einmalprämie, wenn einem x-jährigen Versicherten eine lebenslängliche Leibrente von jährlich "1" ausgerichtet werden soll;
2. Barwert einer lebenslänglichen Leibrente "1";
3. Loskaufsumme, wenn ein x-jähriger Mann sich von der Verpflichtung loskauft, sein Leben lang jährlich die Summe "1" zu zahlen.

Wir gehen nun über zu den aufgeschobenen und temporären Leibrentenbarwerten:

Unter einer aufgeschobenen Leibrente versteht man eine lebenslänglich zahlbare Rente, welche aber erst nach n Jahren bzw. beim Erleben eines vorgegebenen Schlussalters s zu laufen beginnt (es ist dann $n = s-x$). Für die Berechnung des Barwertes einer aufgeschobenen, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente "1", stützen wir uns auf unser Modell der l_x und betrachten das folgende Auszahlungsschema:

		1	1	1	1
	Aufschubszeit	*	*	*	* ...
l_x	$n = (s-x)$ Jahre	l_s	l_{s+1}	l_{s+2}	l_{s+3}

Nach dem Aequivalenzprinzip gilt, wenn wir den gesuchten Barwert mit ${}_{s-x|}\ddot{a}_x$ bezeichnen:

$$l_x \cdot {}_{s-x|}\ddot{a}_x = v^{s-x} \cdot l_s + v^{s-x+1} \cdot l_{s+1} + v^{s-x+2} \cdot l_{s+2} + \ldots$$

mit v^x erweitert:

$$D_x \cdot {}_{s-x|}\ddot{a}_x = D_s + D_{s+1} + D_{s+2} + D_{s+3} + \ldots = N_s$$

$${}_{s-x|}\ddot{a}_x = \frac{N_s}{D_x} \tag{59}$$

Wenn wir beispielsweise $s = 65$ einsetzen, so stellt die Beziehung (59) den Barwert einer ab Alter 65 laufenden jährlich vorschüssig zahlbaren Alterspension "1" dar, die heute einem x-jährigen Arbeitnehmer zugesagt ist.

Eine Umformung der Formel (59) durch Erweiterung des Bruches mit D_s ergibt:

$${}_{s-x|}\ddot{a}_x = \frac{D_s}{D_x} \cdot \frac{N_s}{D_s} = \frac{D_s}{D_x} \cdot \ddot{a}_s \tag{60}$$

D.h. der Barwert der aufgeschobenen Leibrente ist gleich dem Barwert einer Erlebensfalleistung vom Betrage $\ddot{a}_s$.

Soll die Rente unterjährig in m vorschüssigen Raten zu $1/m$ zahlbar sein, so erhält man in Anlehnung an die Näherungsbeziehung (57):

$$_{s-x|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_s}{D_x} \cdot (\ddot{a}_s - \frac{m-1}{2m}) \qquad (61)$$

Die Barwerte der nachschüssig zahlbaren Renten sollen hier nicht weiter untersucht werden. Sie sind in analoger Weise wie die Barwerte der vorschüssigen Renten herzuleiten.

Die <u>temporäre Leibrente</u> wird sofort beginnend an einen x-jährigen Versicherten entrichtet so lange er lebt, längstens jedoch während n Jahren bzw. bis zum Erleben eines vorgegebenen Schlussalters s. Auch hier gilt $n = s-x$. Für die Berechnung des Barwertes für eine jährlich vorschüssig zahlbare Rente "1", den wir mit $\ddot{a}_{x:\overline{s-x|}}$ bezeichnen, blättern wir zurück und betrachten die Gleichung (51). Analog erhalten wir:

$$l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{s-x|}} = l_x + v \cdot l_{x+1} + v^2 \cdot l_{x+2} + v^3 \cdot l_{x+3} + \dots + v^{s-x-1} \cdot l_{s-1} \qquad (62)$$

oder $$\ddot{a}_{x:\overline{s-x|}} = \frac{1}{D_x} \cdot (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{s-1}) \qquad (63)$$

Nun ist:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{s-1} + D_s + D_{s+1} + D_{s+2} + \dots$$

$$N_s = D_s + D_{s+1} + D_{s+2} + \dots$$

und somit:

$$\ddot{a}_{x:\overline{s-x|}} = \frac{N_x - N_s}{D_x} \qquad (64)$$

Formen wir diesen Ausdruck um, so erhalten wir:

$$\ddot{a}_{x:\overline{s-x|}} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_s}{D_x} = \ddot{a}_x - {}_{s-x|}\ddot{a}_x \qquad (65)$$

Der Barwert einer temporären Leibrente ist somit gleich dem Barwert einer sofort beginnenden lebenslänglichen Leibrente vermindert um den Barwert der für dieselbe Dauer aufgeschobenen Leibrente. Bei unterjähriger Zahlung erhält man unter Anwendung der Näherungsbeziehung (57):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{s-x}|} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{D_s}{D_x}\cdot(\ddot{a}_s - \frac{m-1}{2m})$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{s-x}|} = \ddot{a}_{x:\overline{s-x}|} - \frac{m-1}{2m}\cdot(1 - \frac{D_s}{D_x}) \qquad (66)$$

Der Barwert der temporären Leibrente ist eine sehr wichtige Grösse. Er ist der Barwert eines lebenslänglich, längstens jedoch bis zum Schlussalter s zahlbaren Betrages oder Beitrages "1". Wenn wir also für einen Versicherten einen totalen Beitrag B einkassieren, der gemäss Statuten oder Reglement in vorschüssigen monatlichen Raten solange ausgerichtet wird als der Versicherte lebt, längstens jedoch bis zum Schlussalter s, so ist

$$B\cdot\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{s-x}|} \qquad (67)$$

der Barwert aller künftiger Einnahmen zugunsten des betreffenden Versicherten. Wie dargelegt wurde, bildet dieser Barwert der Einnahmen die linke Seite unserer Aequivalenzforderung (45) und spielt daher bei der Berechnung von Jahresbeiträgen bzw. Jahresprämien eine entscheidende Rolle.

VI. Die Todesfalleistung

Alle bis jetzt behandelten Vorsorgeleistungen hatten den Charakter von sog. Erlebensfallversicherungen, d.h. die vereinbarte Versicherungsleistung (Kapital oder Rente) wird nur dann ausgerichtet, wenn der Versicherte im zum voraus festgesetzten Zeitpunkt bzw. in zum voraus festgesetzten Zeitpunkten noch lebt. Stirbt der Versicherte vor dem vereinbarten Zeitpunkt, so wird keine Leistung erbracht, der für die Versicherung zurückgestellte Barwert (= Einmalprämie, siehe Seite 27 unten) bleibt beim Versicherer und liefert den notwendigen Beitrag an die Versicherungskosten für diejenigen Versicherten, welche die vereinbarte Zeitspanne überleben. Dass bei der Barwertsberechnung berücksichtigt wird, dass die zu tätigende Zahlung nicht mit Sicherheit erfolgen wird, wurde bereits auf Seite 23 oben erläutert.

Wir wollen jetzt den Barwert eines Kapitals "1" berechnen, das dann ausgerichtet werden soll, wenn ein heute x-jähriger Mann stirbt. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Kapital am Ende des Sterbejahres fällig sein soll. Diese Versicherungsform bezeichnet man als "lebenslängliche Todesfallversicherung".

Wir nehmen wiederum an, dass alle in unserer fiktiven Gesamtheit figurierenden l_x Männer des Alters x eine lebenslängliche Todesfallversicherung abschliessen wollen. Alle l_x Personen entrichten somit den zu berechnenden Barwert, den man international mit A_x bezeichnet. Da keine weitere Beitragszahlung vorgesehen ist, beträgt der Barwert der Einnahmen einfach $l_x \cdot A_x$.

Für den Barwert der Ausgaben erinnern wir uns an die Formel (39), welche uns erlaubt, die in einjährigen Intervallen zu erwartenden Todesfälle zu ermitteln. Für jeden solchen Todesfall müssen wir am Ende des betreffenden Jahres das Kapital "1" ausrichten. In der nachfolgenden Tabelle sind die Verhältnisse zusammengestellt:

Intervall	Anzahl der Todesfälle im Intervall	Auszuzahlende Kapitalien am Ende des Jahres	Barwert der Ausgaben
x/x+1	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$d_x \cdot 1$	$v \cdot d_x$
x+1/x+2	$d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$	$d_{x+1} \cdot 1$	$v^2 \cdot d_{x+1}$
x+2/x+3	$d_{x+2} = l_{x+2} - l_{x+3}$	$d_{x+2} \cdot 1$	$v^3 \cdot d_{x+2}$
$\vdots$			
$\omega-1/\omega$	$d_{\omega-1} = l_{\omega-1} - 0$	$d_{\omega-1} \cdot 1$	$v^{\omega-x} \cdot d_{\omega-1}$

Wir können somit nach dem in der Formel (45) festgehaltenen Aequivalenzprinzip schreiben:

$$l_x \cdot A_x = v \cdot d_x + v^2 \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot d_{x+2} + \ldots \qquad (68)$$

Die Summe rechts geht bis zum höchsten Alter der Sterbetafel, bricht somit automatisch ab, so dass wir das letzte Glied nicht besonders zu schreiben brauchen. Durch l_x dividiert:

$$A_x = v \cdot \frac{d_x}{l_x} + v^2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3 \cdot \frac{d_{x+2}}{l_x} + \ldots \qquad (69)$$

Wenn wir hier einen kleinen Abstecher in die Wahrscheinlichkeitsrechnung unternehmen, so erkennen wir sofort, dass der gesuchte Barwert A_x wiederum eine Summe von mathematischen Erwartungswerten (vgl. mit Seite 21 unten) darstellt. Die diskontierten Geldbeträge v^{1+t} (t läuft von 0, 1, 2, ... bis ω-x-1) werden jeweils mit den uns bereits bekannten Wahrscheinlichkeiten der Beziehung (43):

$$\frac{d_{x+t}}{l_x} = {}_{t|}q_x$$

multipliziert. Wir erinnern uns, dass das Symbol ${}_{t|}q_x$ diejenige Wahrscheinlichkeit darstellt, dass ein heute x-jähriger Mann nach t Jahren noch lebt und im Laufe des darauffolgenden Jahres, d.h. im Intervall x+t/x+t+1, stirbt.

Multiplizieren wir die beiden Seiten der Gleichung (68) mit v^x, so erhalten wir:

$$D_x \cdot A_x = v^{x+1} \cdot d_x + v^{x+2} \cdot d_{x+1} + v^{x+3} \cdot d_{x+2} + \ldots \qquad (70)$$

Damit erreichen wir nämlich, dass die Exponenten der Abzinsungsfaktoren immer um 1 höher sind als die Indizes der d_x-Werte. Wie bei den ersten Kommutationszahlen (siehe Seite 22) ist es sinnvoll, für einen bestimmten Zinsfuss die d_x mit v^{x+1} zu multiplizieren. Die sich ergebenden Produkte werden tabelliert und bilden die sog. <u>diskontierten Zahlen der Gestorbenen</u>. Man schreibt dafür:

$$v^{x+1} \cdot d_x = C_x \qquad (71)$$

Die Gleichung (70) wird dann, nach Division durch D_x:

$$A_x = \frac{1}{D_x} \cdot (C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots) \tag{72}$$

Wir führen eine weitere Kommutationszahl ein, nämlich die Summe der diskontierten Zahlen der Gestorbenen und schreiben dafür:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots \tag{73}$$

Die endgültige Formel für den Barwert der lebenslänglichen Todesfallversicherung wird dann:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{74}$$

Durch die geschickte Aufstellung von neuen Kommutationszahlen wird auch diese Beziehung überraschend einfach.

Welches sind nun die Zusammenhänge zwischen den uns bekannten Kommutationszahlen D_x und N_x und den neuen C_x und M_x? Ausgehend von der Definitionsbeziehung (71) können wir schreiben:

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x = v^{x+1} \cdot (l_x - l_{x+1}) = v \cdot v^x \cdot l_x - v^{x+1} \cdot l_{x+1} = v \cdot D_x - D_{x+1}$$

$$C_x = v \cdot D_x - D_{x+1} \tag{75}$$

Durch Summation der beiden Seiten dieser Gleichung folgt auch die folgende Beziehung:

$$M_x = v \cdot N_x - N_{x+1} \tag{76}$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass die Summe der N_x mit S_x, die Summe der M_x mit R_x bezeichnet wird. Die S_x und R_x finden speziell bei im Laufe der Versicherungsdauer sich verändernden Leistungen Anwendung.

Setzen wir (76) in (74) ein, so finden wir eine wichtige Beziehung zwischen dem A_x und dem $ä_x$, nämlich:

$$A_x = \frac{v \cdot N_x - N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + v \cdot N_x - N_{x+1} - D_x}{D_x} = 1 - \frac{N_x - v \cdot N_x}{D_x} = 1 - \frac{(1-v) \cdot N_x}{D_x}$$

oder, weil $\frac{N_x}{D_x} = ä_x$ und $1-v = d$:

$$A_x = 1 - d \cdot ä_x \qquad (77)$$

Der Barwert der lebenslänglichen Todesfallversicherung kann also auch aus dem Barwert der sofort beginnenden vorschüssigen Leibrente ermittelt werden (für Werte von d siehe Seite 8 unten).

Soll die Todesfallsumme "1" nur dann ausgerichtet werden, wenn der Versicherte vor dem Schlussalter s, d.h. im Laufe der nächsten s-x Jahre stirbt, so spricht man von einer <u>temporären Todesfallversicherung</u>. Den entsprechenden Barwert bezeichnet man mit ${}_{s-x|}A_x$. Ausgehend von der Gleichung (72) muss die Reihe einfach nach s-x Gliedern abgebrochen werden:

$${}_{s-x|}A_x = \frac{1}{D_x} \cdot (C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{s-1}) \qquad (78)$$

oder

$${}_{s-x|}A_x = \frac{M_x - M_s}{D_x} \qquad (79)$$

Speziell erhalten wir für die Dauer von einem Jahr, also für $s = x+1$, die sog. <u>einjährige Risikoprämie</u> für den Todesfall:

$${}_{1|}A_x = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} = \frac{C_x}{D_x} = \frac{v^{x+1} \cdot d_x}{v^x \cdot l_x} = v \cdot q_x \qquad (80)$$

Wir erinnern uns, dass das Todesfallkapital am Ende des Sterbejahres zahlbar angenommen wurde.

Das Kapitel über die Todesfalleistung möchte ich abschliessen mit einer Versicherungsform, welche bei betrieblichen Vorsorgeeinrichtungen sehr häufig als "Rückdeckung" verwendet wird: die sog. Ueberlebenszeitrente (auch etwa Todesfallzeitrente, Erbrente, Familienrente genannt):

Beim Ableben des Versicherten vor Erreichen des Schlussalters s, erhalten seine Hinterbliebenen eine Zeitrente "1" und zwar bis zum Zeitpunkte, an welchem der Verstorbene das Alter s erreicht hätte. Wenn wir für den Barwert bzw. für die Einmalprämie der Ueberlebenszeitrente $a_{x|\overline{s-x|}}$ setzen (die Rente wird jeweils am Ende des Jahres ausgerichtet, erstmals am Ende des Sterbejahres) und das Aequivalenzprinzip anwenden, so können wir setzen:

$$l_x \cdot a_{x|\overline{s-x|}} = v \cdot (l_x - l_{x+1}) + v^2 \cdot (l_x - l_{x+2}) + v^3 \cdot (l_x - l_{x+3}) + \dots + v^{s-x} \cdot (l_x - l_s)$$

durch l_x dividiert:

$$a_{x|\overline{s-x|}} = v \cdot \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) + v^2 \cdot \left(1 - \frac{l_{x+2}}{l_x}\right) + \dots + v^{s-x} \cdot \left(1 - \frac{l_s}{l_x}\right)$$

$$a_{x|\overline{s-x|}} = v + v^2 + \dots + v^{s-x} - \left(v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + v^{s-x} \cdot \frac{l_s}{l_x}\right)$$

Betrachten wir unsere Formeln (16) und (51) sowie die Bemerkung auf Seite 26 unten für die nachschüssig zahlbare Leibrente, so können wir schreiben:

$$a_{x|\overline{s-x|}} = a_{\overline{s-x|}} - a_{x:\overline{s-x|}} \tag{81}$$

Diese Formel ist einleuchtend: Der Ausdruck für den gesuchten Barwert besagt nämlich, dass die Rente dann ausgerichtet wird, wenn der Versicherte nicht mehr lebt: Zeitrentenbarwert (unbedingt zahlbar) minus Barwert der sofort beginnenden temporären Leibrente (nur im Lebensfalle zahlbar), beide Rentenbarwerte für dieselbe Dauer s-x. Man beachte, dass es sich, infolge der getroffenen Voraussetzung für die Rentenzahlungen, um nachschüssige Rentenbarwerte handelt.

Beim Ableben des Versicherten im Alter x+t ist die Zahlungsdauer der nun beginnenden Rente $s-(x+t) = s-x-t$ eindeutig bestimmt; daher der Name Ueberlebenszeitrente. Ist z.B. das Schlussalter s = 65 Jahre und stirbt der Versicherte im Alter von 45 Jahren, so beträgt die Zahlungsdauer der Zeitrente 65-45 = 20 Jahre. Aus diesem Grunde ist der Versicherer bereit, anstelle der nun einsetzenden Rente "1" deren Barwert $\ddot{a}_{\overline{s-x-t}|}$ (etwa "Ablösungswert" genannt) auszuzahlen. Dieser Ablösungswert wäre nach den getroffenen Voraussetzungen am Ende des Sterbejahres zahlbar. Mit zunehmender Dauer t nach Versicherungsabschluss nimmt der genannte Barwert ab, d.h. je näher beim Schlussalter s sich der Todeszeitpunkt befindet, desto kleiner ist der auszuzahlende Ablösungswert. Die Versicherung einer Ueberlebenszeitrente entspricht somit einer temporären Todesfallversicherung mit abnehmender Todesfallsumme; dabei ist die Abnahme nicht linear, sondern entspricht dem Verlauf der $\ddot{a}_{\overline{s-x-t}|}$ (x und s fest, t variabel).

Wie bereits erwähnt wird nun die Versicherung der Ueberlebenszeitrente in der Personalvorsorge sehr oft als Rückdeckung verwendet. Offensichtlich geschieht dies bei der "Alterssparkasse mit Todesfallversicherung", etwa auch "Sparversicherung" genannt. Bei einem vorzeitigen Todesfall ist das angesammelte individuelle Sparkapital noch bescheiden, der Ablösungswert der Ueberlebenszeitrente jedoch hoch; erfolgt aber der Tod nahe beim Schlussalter, so liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt: das angesammelte Sparkapital hat nahezu den bei der Alterspensionierung zur Verfügung stehenden Endwert erreicht, der Ablösungswert der versicherten Ueberlebenszeitrente ist klein. Es gelingt nun, die Höhe der Ueberlebenszeitrente so zu bestimmen, dass während der ganzen Versicherungsdauer die Summe aus Ablösungswert und angesammeltem Sparkapital nie unter dem im Schlussalter angesammelten Endsparkapital fällt. Ist der Rechnungszinsfuss der Alterssparkasse gleich dem Rechnungszinsfuss mit welchem der Ablösungswert der Ueberlebenszeitrente berechnet wird, so kann die Höhe der Ueberlebenszeitrente sogar so berechnet werden, dass beim Ableben in jedem beliebigen Zeitpunkt der Versicherungsdauer, die Summe aus Ablösungswert und angesammeltem Sparkapital gleich ist dem im Schlussalter angesammelten Endsparkapital.

VII. Individuelle Jahresprämien

Wir wissen, dass die numerische Auswertung aller bisher hergeleiteten Barwerte von Versicherungsleistungen gleichzeitig auch die entsprechende Netto-Einmalprämie ergibt. Bei der Anwendung des Aequivalenzprinzipes wurde bis jetzt immer angenommen, dass nach dem Abschluss der Versicherung keine Prämien oder Beiträge mehr fällig sein sollen. Wir erinnern uns aber auch an unsere Beziehungen (64) und (66), welche den Barwert einer lebenslänglich, längstens jedoch bis zum Schlussalter s zahlbaren Rente "1" darstellen. Sagen wir anstelle von Rente "individuelle Jahresprämie" und bezeichnen wir diese mit $P_{x:\overline{s-x|}}$, so ist das Produkt $P_{x:\overline{s-x|}} \cdot ä_{x:\overline{s-x|}}$ der Barwert aller künftigen jährlich vorschüssig zahlbaren Jahresprämien, geschuldet solange der Versicherte lebt, längstens jedoch bis zum Alter s. Analog ist $P^{(12)}_{x:\overline{s-x|}} \cdot ä^{(12)}_{x:\overline{s-x|}}$ der Barwert aller künftigen monatlich zahlbaren Prämien, geschuldet solange der Versicherte lebt, längstens jedoch bis zum Schlussalter s.

Bezeichnen wir ganz allgemein die Einmalprämie einer Versicherung, abgeschlossen im Alter x für eine Dauer von s-x Jahren (d.h. mit dem Schlussalter s) mit $E_{x:\overline{s-x|}}$ und setzen den Barwert der Einnahmen gleich dem Barwert der Ausgaben, so wird, bei monatlich vorschüssiger Prämienzahlung:

$$P^{(12)}_{x:\overline{s-x|}} \cdot ä^{(12)}_{x:\overline{s-x|}} = E_{x:\overline{s-x|}} \qquad (82)$$

und daraus

$$P^{(12)}_{x:\overline{s-x|}} = \frac{E_{x:\overline{s-x|}}}{ä^{(12)}_{x:\overline{s-x|}}} \qquad (83)$$

Soll die Jahresprämie jeweils einmal zu Beginn jedes Jahres fällig sein so ist die Einmalprämie einfach durch den entsprechenden Barwert $ä_{x:\overline{s-x|}}$ zu dividieren.

Die letzte Formel gilt ganz allgemein: Die individuelle Jahresprämie wird erhalten indem man die Einmalprämie dividiert durch den der Prämienzahlungsart und -dauer entsprechenden Leibrentenbarwert. In der Formel (83) ist stillschweigend angenommen, dass die Prämienzahlungsdauer gleich ist wie die Versicherungsdauer, nämlich s-x Jahre. Dies braucht nicht unbedingt der Fall zu sein. Bezeichnen wir mit s' das höchste Alter, bei welchem im Erlebensfall noch eine Prämienzahlung erfolgen soll, so erhalten wir für die bezügliche jährlich vorschüssig zahlbare Jahresprämie:

$$P_{x:\overline{s'-x}|} = \frac{E_{x:\overline{s-x}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{s'-x}|}} \qquad (84)$$

In der Personalvorsorge wird in der Regel anstelle des Begriffes "Prämie" das Wort "Beitrag" verwendet. Auch im amerikanischen Sprachgebrauch wird unterschieden zwischen "premium" für eine Prämie, welche an eine Versicherungsgesellschaft entrichtet wird und "deposit" für den Beitrag an einen selbstverwalteten Pensionsfonds. Dies soll uns hier nicht weiter beschäftigen, indem die rechnungsmässigen Belange nicht tangiert werden.

Endlich lässt der Titel des vorliegenden Kapitels "Individuelle Jahresprämien" darauf schliessen, dass es auch kollektive Jahresprämien gibt. Diese werden nach einem erweiterten Aequivalenzprinzip berechnet, indem beispielsweise die Barwerte der künftigen Einnahmen und Ausgaben nicht individuell, sondern global für ganze Personenbestände berechnet und weiter verwendet werden. Dabei können die Berechnungen unter Zugrundelegung weiterer Annahmen, beispielsweise über den künftigen Verlauf der Gehälter und Löhne, über künftige Zu- und Abgänge usw., beliebig erweitert werden. Die Behandlung dieser Probleme würde jedoch den Rahmen des vorliegenden Kurses sprengen.

VIII. Das Deckungskapital

Der Begriff des Deckungskapital soll an einem praktischen Beispiel veranschaulicht werden. Wir wollen nämlich die Finanzierung bzw. den finanziellen Mechanismus einer temporären Todesfallversicherung eingehend untersuchen. Wenn wir also annehmen, dass unser Versicherter beim Abschluss der Versicherung 45 Jahre alt ist, die Versicherungsdauer 10 Jahre, das Schlussalter $s = 45+10 = 55$ Jahre und das versicherte Kapital Fr. 10 000.- beträgt, so können wir für die Finanzierung folgende zwei Möglichkeiten ins Auge fassen:

<u>1. Möglichkeit</u>: Die Versicherung wird zu Beginn jedes Jahres für die Dauer eines Jahres <u>neu</u> abgeschlossen durch <u>sukzessive Einmalprämien</u>.

Unter Verwendung der Tafeln SM 1958/63 zum technischen Rechnungszinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ erhalten wir für diese sukzessiven Einmalprämien gemäss Formel (80):

$$_{|1}A_x = \frac{C_x}{D_x} = \frac{v^{x+1}\cdot d_x}{v^x\cdot l_x} = v\cdot\frac{d_x}{l_x}$$

x	$10000\cdot{}_{|1}A_x$ Fr.
45	40.10
46	44.31
47	48.67
48	53.64
49	59.23
50	66.10
51	73.77
52	82.16
53	91.31
54	101.82

Die jährlichen "Betriebsrechnungen" für den Bestand der fiktiven Gesamtheit der l_x gestalten sich wie folgt:

Jahr t	l_x	Einnahmen (Ende Jahr) $l_x\cdot 10000\cdot{}_{|1}A_x\cdot 1{,}035$ Mio. Fr.	Ausgaben (Ende Jahr) $10000\cdot d_x$ Mio. Fr.
1.	91 313	3,79	3,79
2.	90 934	4,17	4,17
3.	90 517	4,56	4,56
4.	90 061	5,00	5,00
5.	89 561	5,49	5,49
6.	89 012	6,09	6,09
7.	88 403	6,75	6,75
8.	87 728	7,46	7,46
9.	86 982	8,22	8,22
10.	86 160	9,08	9,08

In <u>jedem einzelnen Jahr</u> entsprechen die Einnahmen den jeweiligen Ausgaben. Die jeweils erhobenen Prämien sind einjährige Risikoprämien. Irgendeine Reservebildung entsteht nicht.

2. Möglichkeit: Die Versicherung wird für die vorgesehene Dauer von 10 Jahren abgeschlossen mit einer gleichbleibenden individuellen Jahresprämie, einer sog. individuellen Durchschnittsprämie.

Mit Hilfe derselben Rechnungsgrundlagen erhalten wir für diese individuelle Jahresprämie (jeweils zu Beginn jedes Jahres zahlbar), unter Berücksichtigung unserer Formeln (79), (64) und (83):

$$P = 10000 \cdot \frac{M_{45} - M_{55}}{N_{45} - N_{55}} = 10000 \cdot \frac{7752,85 - 6710,05}{344970,77 - 181640,73} = \frac{10428000}{163330,04} = \underline{\underline{\text{Fr. } 63.85}}$$

Die nachfolgende Tabelle enthält nun wiederum die Betriebsrechnungen für den fiktiven Bestand der l_x im Laufe der Versicherungsdauer, jeweils am Ende des Jahres. In der Kolonne "Einnahmen (Ende Jahr)" figurieren die zu Beginn des betreffenden Jahres einkassierten Prämien plus den verbleibenden Einnahmenüberschuss des Vorjahres, beides mit Zins für 1 Jahr. Die Kolonne "Ausgaben (Ende Jahr)" enthält die ausbezahlten Todesfallsummen im betreffenden Jahre, jeweils fällig am Ende des Jahres. Die Kolonne "Einnahmenüberschuss (Ende Jahr)" ist gleich der Differenz der beiden erstgenannten Kolonnen:

Jahr t	Einnahmen (Ende Jahr) $(l_x \cdot P + {}_{t-1}V) \cdot 1,035$ Mio. Fr.	Ausgaben (Ende Jahr) $10000 \cdot d_x$ Mio. Fr.	Einnahmenüberschuss (Ende Jahr) ${}_tV$ = Deckungskapital Mio. Fr.
1.	6,03	3,79	2,24
2.	8,33	4,17	4,16
3.	10,29	4,56	5,73
4.	11,88	5,00	6,88
5.	13,04	5,49	7,55
6.	13,70	6,09	7,61
7.	13,72	6,75	6,97
8.	13,01	7,46	5,55
9.	11,49	8,22	3,27
10.	9,08	9,08	0,00

Im Gegensatz zur Finanzierung durch einjährige Risikoprämien stellen wir hier, bei der Finanzierung durch eine Durchschnittsprämie, fest, dass die Rechnung erst am Schlusse der Versicherungsdauer aufgeht. Die in den ersten Jahren zu viel einkassierten Prämienteile sind nicht etwa erfreuliche Gewinne, vielmehr müssen sie zinstragend angelegt werden, die so entstehende Reserve heisst Deckungskapital und dient zur späteren Mitfinanzierung der Todesfallkapitalien.

Das Deckungskapital stellt somit eine Schuld des Versicherers gegenüber den Versicherten dar. Es wird in unserem Beispiel durch die vorerst nicht verwendeten Prämienteile aufgebaut und später für die Zahlung der im Vergleich zur jeweiligen Prämieneinnahme grösser werdenden Todesfallkapitalien verwendet.

Die beiden geschilderten Möglichkeiten zeigen übrigens zwei klassische Finanzierungsverfahren: Die 1. Möglichkeit ist ein reines Umlageverfahren: die jeweils einkassierten Prämien werden laufend für die auszuzahlenden Todesfallkapitalien verwendet. Da diese mit der Zeit zunehmen, müssen auch die entsprechenden Prämien erhöht werden. Die 2. Möglichkeit ist ein reines Kapitaldeckungsverfahren: Die Jahresprämie wird so bestimmt, dass sie während der ganzen Versicherungsdauer konstant bleibt. Sie ist also zu Beginn höher als beim Umlageverfahren. Die nicht verwendeten Prämienteile der ersten Hälfte der Versicherungsdauer werden zinstragend angelegt und bilden ein Deckungskapital. In der zweiten Hälfte der Versicherungsdauer sind die Jahresprämien kleiner als beim Umlageverfahren bzw. zu klein für das höher gewordene Risiko, sodass das angesammelte Deckungskapital sukzessive wieder abgebaut werden muss. Die beiden Finanzierungsmöglichkeiten weisen jedoch ein gemeinsames Rechnungselement auf: Die jährliche Ausgaben, nämlich $10000 \cdot d_x$ sind dieselben.

Es stellt sich nun die Frage nach einer Definition des Deckungskapitals, welche uns erlaubt, diese Schuld jederzeit berechnen zu können. Nach den bisherigen Ausführungen muss es gelingen, die Zahlen der Kolonne rechts unserer letzten Tabelle wie folgt zu berechnen:

Endwert der Prämieneinnahmen	m i n u s	Endwert der bereits ausbezahlten Versicherungsleistungen	(85)

Wir blicken also in einem bestimmten Zeitpunkt der Versicherungsdauer zurück auf das Versicherungsgeschehen: Wir haben Prämien eingenommen, wir haben Versicherungsleistungen erbracht, die Differenz der aufgezinsten Endwerte muss somit das gesuchte Deckungskapital ergeben. Die Beziehung (85) stellt somit eine erste Definition des Deckungskapitals dar. Weil für die Berechnungen die bereits zurückliegenden Tatbestände berücksichtigt werden, spricht man vom Deckungskapital, berechnet nach der retrospektiven Methode oder kurz vom retrospektiven Deckungskapital.

Für die Bestimmung der in der Beziehung (85) genannten Endwerte geht man analog vor wie bei den Barwerten, nur erfolgt hier selbstredend eine Aufzinsung anstelle einer Abzinsung. Betrachten wir den Endwert der Prämieneinnahmen am Ende des t. Jahres:

Die erste Jahresprämie von Fr. 63.85 wurde zu Beginn des 1. Jahres von l_x Personen entrichtet und lag während t Jahren an Zins, die zweite Jahresprämie wurde zu Beginn des zweiten Jahres entrichtet von l_{x+1} Personen und lag während t-1 Jahren an Zins, usw. Zu Beginn des t. Jahres wurde die Jahresprämie von l_{x+t-1} Personen entrichtet und lag noch 1 Jahr an Zins. Wir können also für den Endwert der Prämieneinnahmen schreiben:

$$63.85 \cdot (l_x \cdot r^t + l_{x+1} \cdot r^{t-1} + l_{x+2} \cdot r^{t-2} + \dots + l_{x+t-1} \cdot r)$$

Eine analoge Ueberlegung gibt uns den Endwert der bereits ausbezahlten Todesfallkapitalien, wobei wir uns erinnern, dass diese jeweils am Ende des Jahres entrichtet werden:

$$10000 \cdot (d_x \cdot r^{t-1} + d_{x+1} \cdot r^{t-2} + d_{x+2} \cdot r^{t-3} + \dots + d_{x+t-1})$$

In unserem Beispiel ist x=25, t lassen wir laufen von 1 bis 10.

Die folgende Tabelle enthält die nach den beiden letzten Formeln berechneten Endwerte und deren Differenzen:

Jahr t	Endwert der Prämien-einnahmen Mio. Fr.	Endwert der ausbezahlten Kapitalien Mio. Fr.	Deckungskapital (retrospektiv) Mio. Fr.
1.	6,03	3,79	2,24
2.	12,25	8,09	4,16
3.	18,67	12,94	5,73
4.	25,27	18,39	6,88
5.	32,07	24,52	7,55
6.	39,08	31,47	7,61
7.	46,29	39,32	6,97
8.	53,71	48,16	5,55
9.	61,33	58,06	3,27
10.	69,17	69,17	0,00

Wie zu erwarten entsprechen die so berechneten Deckungskapitalien der in der Tabelle auf Seite 40 unten angegebenen.

Eine andere Ueberlegung führt in unserem Falle zum gleichen Ergebnis. Sie zeigt im übrigen die grosse Präzision mit welcher unser finanzieller Mechanismus arbeitet - immer unter der Voraussetzung jedoch, dass die Versicherungsfälle genau wie die zu erwartenden verlaufen. Wir stellen uns am Ende des t. Jahres und blicken vorwärts auf das zu erwartende Versicherungsgeschehen: Wir werden Versicherungsleistungen auszahlen müssen, wir werden dafür die vereinbarte individuelle Durchschnittsprämie weiterhin einnehmen. Bei kleinen t zu viel, bei grösseren t zu wenig, jedenfalls müssen wir entweder das Deckungskapital weiterhin anhäufen oder aber es für die Kostendeckung verwenden. Diese Ueberlegungen führen zu einer weiteren Definition des Deckungskapitals, nämlich:

Barwert der künftigen Leistungen	m i n u s	Barwert der künftigen Prämien	(86)

Diese Definition verlangt eine andere Berechnungsmethode für das Deckungskapital, welche im Gegensatz zur ersten, die künftig zu erwartenden Tatbestände berücksichtigt. Man nennt sie daher prospektive Methode, das so berechnete Deckungskapital kurz prospektives Deckungskapital.

Die Beziehung (86) erinnert uns doch an unsere Aequivalenzbeziehung (45), in welcher doch bei Versicherungsabschluss gefordert wird: Es muss der Barwert der Einnahmen gleich sein dem Barwert der Ausgaben. Sind also beim Versicherungsabschluss die Grössen links und rechts des Minuszeichen in der Beziehung (86) gleich, so heisst das nichts anderes als das Deckungskapital "0" sein muss.

Die Berechnung der in (86) genannten Barwerte bereitet uns keine Schwierigkeiten. Es ist der Barwert der künftigen Kapitalien am Ende des t. Jahres, d.h. wenn unsere Versicherten das Alter x+t erreicht haben:

$$10000 \cdot (d_{x+t} \cdot v + d_{x+t+1} \cdot v^2 + d_{x+t+2} \cdot v^3 + \ldots + d_{s-1} \cdot v^{s-x-t})$$

Der Barwert der künftigen Prämien im gleichen Zeitpunkt:

$$63.85 \cdot (l_{x+t} + l_{x+t+1} \cdot v + l_{x+t+2} \cdot v^2 + \ldots + l_{s-1} \cdot v^{s-x-t-1})$$

In unserem Beispiel ist x=25, t lassen wir laufen von 0 bis 10.

Die folgende Tabelle enthält die entsprechenden Barwerte und Differeenzen:

Jahr t	Barwert der künftigen Kapitalien Mio. Fr.	Barwert der künftigen Prämien Mio. Fr.	Deckungskapital (prospektiv) Mio. Fr.	
0.	49,04	49,04	0,00	Aequivalenzprinzip
1.	46,96	44,72	2,24	
2.	44,44	40,28	4,16	
3.	41,43	35,70	5,73	
4.	37,88	31,00	6,88	
5.	33,72	26,17	7,55	
6.	28,81	21,20	7,61	
7.	23,07	16,10	6,97	
8.	16,42	10,87	5,55	
9.	8,77	5,50	3,27	
10.	0,00	0,00	0,00	

Am Ende des 10. Jahres läuft die Versicherung ab, die Barwerte der künftigen Kapitalien und Prämien sind zwangsläufig null, ebenso ihre Differenz.

Wir stellen fest, dass die nach der prospektiven Methode berechneten Deckungskapitalien gleich sind wie die nach der retrospektiven Methode berechneten. Dies gilt allgemein, unter der wichtigen Voraussetzung jedoch, dass die Versicherung durch eine individuell berechnete Prämie finanziert wird. Dabei kann diese Prämie sowohl eine Einmalprämie, als auch eine Jahresprämie sein. Sie darf aber nicht irgendwie einheitlich festgesetzt sein, wie dies z.B. bei den meisten Pensionskassen vorgesehen ist. In diesen Fällen ist das prospektive Deckungskapital nicht gleich dem retrospektiven Deckungskapital.

Die Aussage, dass bei individueller Finanzierung das prospektive Deckungskapital gleich dem retrospektiven ist, kann selbstverständlich auch rein algebraisch für alle möglichen Versicherungsformen bewiesen werden. Das wollen wir aber hier nicht tun. Es war mir mehr daran gelegen, den ganzen finanziellen Mechanismus einer einfachen Versicherungsform unter Zugrundelegung unseres Modells der l_x eingehend vorzuführen.

In der Praxis ist die Ermittlung des Einzeldeckungskapitals von grosser Bedeutung. Dieses kann ohne Schwierigkeit aus dem behandelten Deckungskapital der fiktiven Gesamtheit der l_x ermittelt werden. Es gilt nämlich:

$$\text{Einzeldeckungskapital} = \frac{\text{Deckungskapital der fiktiven Gesamtheit}}{l_{x+t}} \qquad (87)$$

Das Einzeldeckungskapital stellt somit denjenigen Betrag dar, der für einen (x+t)-jährigen Versicherten zurückgestellt werden muss. Wenn wir die beiden auf Seite 43 unten angegebenen Barwerte durch l_{x+t} dividieren und gleichzeitig die Differenz und damit das Einzeldeckungskapital ${}_tV$ bilden, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
{}_tV = {} & \frac{10000}{l_{x+t}} \cdot (d_{x+t} \cdot v + d_{x+t+1} \cdot v^2 + \ldots + d_{s-1} \cdot v^{s-x-t}) \\
& - \frac{63.85}{l_{x+t}} \cdot (l_{x+t} + l_{x+t+1} \cdot v + \ldots + l_{s-1} \cdot v^{s-x-t-1})
\end{aligned}
$$

Um zu den uns bekannten Kommutationswerten zu gelangen, erweitern wir die beiden obigen Brüche mit v^{x+t} und erhalten:

$$
{}_tV = \frac{10000}{D_{x+t}} \cdot (C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots + C_{s-1}) - \frac{63.85}{D_{x+t}} \cdot (D_{x+t} + D_{x+t+1} + \ldots + D_{s-1})
$$

oder

$$
{}_tV = 10000 \cdot \frac{M_{x+t} - M_s}{D_{x+t}} - 63.85 \cdot \frac{N_{x+t} - N_s}{D_{x+t}}
$$

und daraus

$$
{}_tV = 10000 \cdot {}_{s-x-t|}A_{x+t} - 63.85 \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t|}}
$$

Die Definition des prospektiven Deckungskapitals ist hier offensichtlich, indem $10000 \cdot {}_{s-x-t|}A_{x+t}$ den Barwert der künftigen Leistungen und $63.85 \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t|}}$ den Barwert der künftigen Prämien darstellen für einen heute (x+t)-jährigen Versicherten und einer verbleibenden Versicherungsdauer von (s-x-t) Jahren.

Ganz allgemein können wir für das prospektive individuelle Deckungskapital schreiben, falls $E_{x+t:\overline{s-x-t|}}$ den Barwert bzw. die Einmalprämie einer Versicherung, abgeschlossen im Alter x+t für eine Dauer von (s-x-t) Jahren und $P_{x:\overline{s-x|}}$ die Jahresprämie bedeuten,

$$
{}_tV = E_{x+t:\overline{s-x-t|}} - P_{x:\overline{s-x|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t|}} \qquad (88)
$$

Für unsere temporäre Todesfallversicherung enthält die folgende Tabelle noch die individuellen Angaben: $x = 45$ $s = 55$ SM 1958/63 $3\frac{1}{2}\%$

t	$10000 \cdot {}_{s-x-t|}A_{x+t}$	$63.85 \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t|}}$	${}_tV$
	Fr.	Fr.	Fr.
0	537,01	537,01	0,00
1	516,45	491,77	24,68
2	490,98	444,97	46,01
3	460,08	396,44	63,64
4	423,03	346,19	76,84
5	378,76	293,99	84,77
6	325,85	239,82	86,03
7	262,96	183,56	79,40
8	188,77	124,95	63,82
9	101,75	63,85	37,90
10	0,00	0,00	0,00

Wurde die Versicherung mit einer Einmalprämie abgeschlossen oder sind aus irgendeinem Grunde keine Prämien mehr geschuldet, so ist der Barwert der künftigen Prämien selbstredend gleich null. Unsere Formel (88) wird dadurch stark vereinfacht und es wird das prospektive Deckungskapital am Ende des t. Jahres:

$$ {}_tV = E_{x+t:\overline{s-x-t|}} \tag{89}$$

Für die praktische Berechnung des Deckungskapital wird meistens die prospektive Methode angewandt. Sie bietet, neben ihrer Einfachheit, den sehr grossen Vorteil, dass die Rechnungsgrundlagen im Laufe der Versicherungsdauer geändert werden können, bzw. neuen Verhältnissen angepasst werden können (Zinsfuss, weitere Abnahme der Sterblichkeit usw.). Wenn im folgenden es nicht ausdrücklich vermerkt ist, werden wir immer die prospektive Methode anwenden.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch den Verlauf des Deckungskapitals untersuchen für die folgende Vorsorgekombination:

Eintrittsalter in die Vorsorgeeinrichtung: $x = 30$, männlicher Versicherter
Anrechenbares Jahresgehalt: Fr. 20 000.-
Altersrente ab Alter 65: 50% des Jahresgehaltes: Fr. 10 000.-
Im Todesfall soll ein Kapital von Fr. 80 000.- ausgerichtet werden und zwar unabhängig davon, wann der Tod eintritt.

Die versicherungstechnischen Grundlagen seien VZ 1960 $3\frac{1}{2}\%$. Für die Berechnung der Barwerte der anwartschaftlichen und laufenden Altersrente werden die Nettowerte, für die Berücksichtigung der künftigen Sterblichkeitsabnahme um 10% verstärkt. Es folgt zuerst eine Zusammenstellung der zu verwendenden Barwerte:

x	$1{,}1\cdot{}_{65-x\vert}\ddot{a}_x^{(12)}$	$1{,}1\cdot\ddot{a}_x^{(12)}$	$A_x = 1 - d\cdot\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_{x:\overline{65-x}\vert}^{(12)}$
30	2,754		0,23718	19,596
35	3,288		0,27755	17,917
40	3,933		0,32456	15,941
45	4,725		0,37748	13,656
50	5,730		0,43541	11,029
55	7,049		0,49749	7,994
60	8,872		0,56245	4,416
64	10,938		0,61528	0,975
65		11,584	0,62840	
70		9,508	0,69221	
75		7,605	0,75071	
80		5,953	0,80150	
85		4,582	0,84367	
90		3,484	0,87742	
95		2,628	0,90373	
100		1,968	0,92402	
105		1,491	0,93869	

Die Versicherungskombination besteht also aus einer aufgeschobenen Leibrente von jährlich Fr. 10 000.- und einer lebenslänglichen Todesfallversicherung von Fr. 80 000.-. Für die entsprechenden Jahresprämien, monatlich vorschüssig, längstens bis zum Alter 65 zahlbar, erhalten wir:

$$P(\text{Altersrente}) = 10000\,\frac{2{,}754}{19{,}596} = \text{Fr. } 1405.39 \qquad s = 65$$

$$P(\text{Todesfallsumme}) = 80000\,\frac{0{,}23718}{19{,}596} = \text{Fr. } 968.28 \quad s = 65$$

Die totale Jahresprämie beträgt somit Fr. 2373.67, das sind 11,87% des anrechenbaren Jahresgehaltes.

Das Deckungskapital am Ende des t. Jahres errechnet sich aus den Formeln:

<u>für die Altersrente</u>:

für $\underline{30 \leq (x+t) \leq 64}$: $10000 \cdot 1{,}1 \cdot {}_{65-x-t|}\ddot{a}^{(12)}_{x+t} - 1405.39 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{x+t:\overline{s-x-t|}}$

für $\underline{(x+t) \geq 65}$: $10000 \cdot 1{,}1 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{x+t}$

<u>für die Todesfallsumme</u>:

für $\underline{30 \leq (x+t) \leq 64}$: $80000 \cdot A_{x+t} - 968.28 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{x+t:\overline{s-x-t|}}$

für $\underline{(x+t) \geq 65}$: $80000 \cdot A_{x+t}$

<u>Zum Vergleich</u> seien ferner die Summe der aufgezinsten Jahresprämien für die Altersrente $1405.39 \cdot \ddot{s}^{(12)}_{\overline{t|}}$, die Summe der Jahresprämien für die Todesfallversicherung ohne Zins $968.28 \cdot t$ und mit Zins $968.28 \cdot \ddot{s}^{(12)}_{\overline{t|}}$ angegeben:

		Deckungskapital			Zum Vergleich		
		der Altersrente	der Todesfallsumme	Total	$1405.39 \cdot \ddot{s}^{(12)}_{\overline{t\|}}$	$968.28 \cdot t$	$968.28 \cdot \ddot{s}^{(12)}_{\overline{t\|}}$
t	x+t	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
0	30	0	0	0	0	0	0
5	35	7 700	4 855	12 555	7 678	4 841	5 290
10	40	16 927	10 529	27 456	16 798	9 683	11 573
15	45	28 058	16 976	45 034	27 629	14 524	19 036
20	50	41 800	24 154	65 954	40 494	19 366	27 899
25	55	59 255	32 059	91 314	55 772	24 207	38 426
30	60	82 514	40 720	123 234	73 918	29 048	50 928
34	64	108 010	48 278	156 288	90 858	32 922	62 599
35	65	115 840	50 272	166 112			
40	70	95 080	55 377	150 457			
45	75	76 050	60 057	136 107			
50	80	59 530	64 120	123 650			
55	85	45 820	67 494	113 314			
60	90	34 840	70 194	105 034			
65	95	26 280	72 298	98 578			
70	100	19 680	73 922	93 602			
75	105	14 910	75 095	90 005			

Wir stellen fest, dass das Deckungskapital der Altersrente schneller anwächst als die diesbezügliche aufgezinste Jahresprämie $1405.39 \cdot s_{\overline{t|}}^{(12)}$. Das ist richtig, weil nur diejenigen Versicherten eine Altersrente erhalten werden, welche das Alter von 65 Jahren erleben. Die Prämien derjenigen Personen, welche zwischen den Altern 30 und 65 sterben, erhöhen das Deckungskapital und decken einen Teil der Kosten für die Altersrenten. Das Deckungskapital der Altersrente hat beim Rentenbeginn im Alter 65 sein Maximum, fällt dann ab um beim höchsten Alter der Sterbetafel auf null zu sinken, indem von diesem Alter an keine Lebenden mehr vorhanden sind.

Das Deckungskapital der Todesfallsumme entspricht in den ersten Jahren der Versicherung ungefähr der Summe der diesbezüglichen Prämie ohne Zins. Wenn wir das Versicherungsgeschehen retrospektiv betrachten, so können wir sagen, dass in den ersten Versicherungsjahren die Zinsen das Risiko kompensieren. Mit zunehmender Versicherungsdauer t übersteigen jedoch die Zinseinnahmen die Aufwendungen für die vorzeitig auszuzahlenden Todesfallsummen und äufnen damit das Deckungskapital. Dieses steigt bis zum höchsten Alter der Sterbetafel auf Fr. 80 000.-; das ist nämlich derjenige Zeitpunkt, an welchem spätestens die Todesfallsumme ausbezahlt werden muss. Im Gegensatz zur temporären Todesfallversicherung ist bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung das versicherte Ereignis gewiss. Das individuelle Deckungskapital steigt von null bis auf den Betrag des Todesfallkapitals. Einen gleichen Verlauf beobachten wir bei der sog. gemischten Kapitalversicherung, bei welcher das versicherte Kapital beim Tode, spätestens jedoch beim Erleben eines zum voraus festgesetzten Schlussalters ausbezahlt wird (eine solche Versicherung ist einfach eine Kombination aus einer temporären Todesfallversicherung und einer reinen Erlebensfallversicherung).

Dieses Beispiel, zusammen mit demjenigen der temporären Todesfallversicherung, hat gezeigt wie mannigfaltig der Verlauf des Deckungskapitals sein kann und wie sehr die Schuld des Versicherers gegenüber dem Versicherten von der Versicherungsform abhängt. Erst wenn man sich mit dem Begriff und der Darstellung des Deckungskapitals vertraut gemacht hat, wird der finanzielle Mechanismus einer Lebensversicherung verständlich.

Das Deckungskapital bildet die entscheidende Grundlage nicht nur bei allen Neugründungen von Pensionskassen, bei Anpassungen von bestehenden Vorsorgeeinrichtungen an neue Verhältnisse, an AHV-Revisionen usw., bei Fusionen von Vorsorgeeinrichtungen, bei Freizügigkeitsabkommen, bei Uebernahmen und Liquidationen, sondern auch bei speziellen individuellen Regelungen, wie bei Neueintritten, bei speziellen Aufnahmebedingungen, bei der Festsetzung der zu treffenden Massnahmen beim Einbau von künftigen Gehalts- und Lohnerhöhungen, beim Uebertritt von einer Einlegerkasse in die Pensionskasse, bei der Gewährung von sog. externen Versicherungen usw.

Die in den Statuten und Reglementen vorgesehene periodische Kontrolle der Pensionskasse besteht im wesentlichen darin, den Barwert der zugesprochenen Vorsorgeleistungen, seien es nun anwartschaftliche oder bereits laufende Leistungen, sowie den Barwert der vorgesehenen Beiträge mit Hilfe von vorsichtig zu wählenden technischen Grundlagen zu berechnen. Die Differenz zwischen diesen Barwerten ergibt dann das Deckungskapital, das mit dem effektiv vorhandenen Vermögen der Kasse verglichen werden muss. Ist das Vermögen der Kasse grösser als das Dekkungskapital, spricht man von einem versicherungstechnischen Ueberschuss, ist jedoch das umgekehrte der Fall, so weist die Kasse einen versicherungstechnischen Fehlbetrag auf.

Zürich, im Juni 1969